第14章　２端子対回路

- これまで電気回路における電圧、電流および電力の求め方について勉強してきた。
- 電気回路は、ある機能を持つまとまりとしてまとまりとして用いられることが多い。特に電力や信号の伝送に用いられる場合には、2端子対回路として取り扱われる。
- 本章では、2端子対回路の伝送特性を表現する各種パラメータについて勉強する。

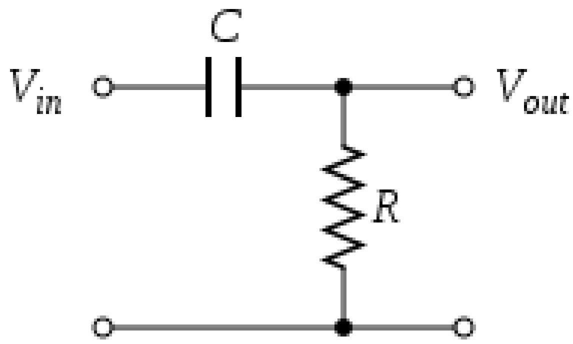
14.1　2端子対回路とその表現

- ２端子対回路とは？

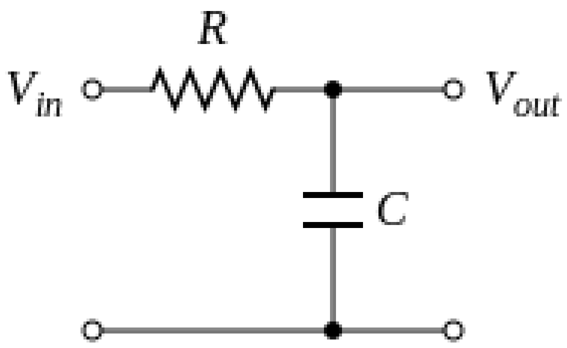
　図のように、回路から2組の端子対を引き出して、そのうち1組を入力側、他の1組を出力側として使う場合、この回路を2端子対回路と呼ぶ。

２端子対回路の例： フィルタ回路

- **フィルタ回路**とは、入力された電気信号に帯域制限をかけたり、特定の周波数成分を取り出すための電気回路（または電子回路）、つまりフィルタの役割をする電気回路のことを言う。**濾波器**（ろはき）ともいう。



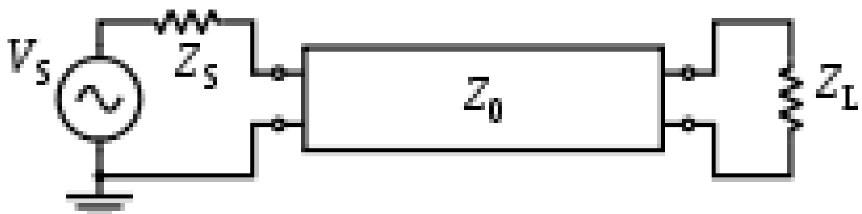
ハイパス（高域通過）フィルタの例

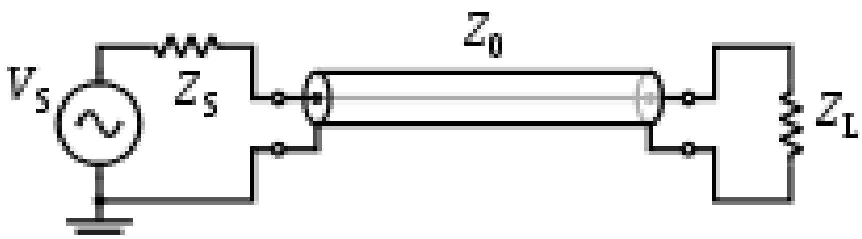


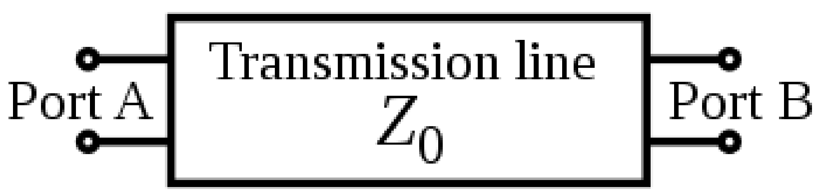
ローパス（低域通過）フィルタの例

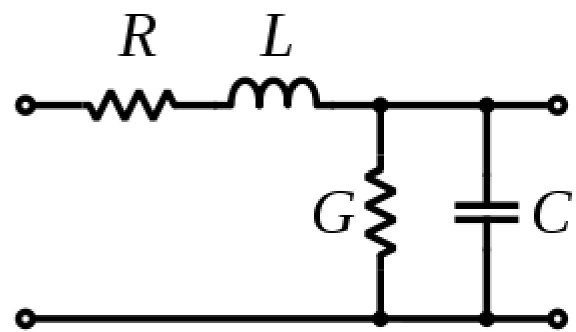
2端子対回路の例: 転送線路

電力信号をある地点から別の地点へ送信するための配線。









伝送線路は短い区間を表す2端子対の素子を無限に直列に接続した分布定数回路で表される。

2端子対回路の変数

- 通常、2端子対回路に次の制限条件を設ける。

1. 回路は線形で、重ね合わせの理が成り立つ。
2. $i_1 = i'_1, \ i_2 = i'_2$ が成り立つ。
3. 内部に発振回路持たない。

- 以上の条件で、2端子対回路の変数は i_1, v_1, i_2, v_2 の4つとなる。
- そのうち2つを独立変数 x_1, x_2 として選んで、残りの2つを従属変数 y_1, y_2 とすれば、回路の特性が次のように表される。

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

- よって、2端子対回路は4つのパラメータ $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ で特徴付けられる。

- 2端子対回路の4つの変数 i_1, v_1, i_2, v_2 を x_1, x_2 への割り当て方は6通りあるので、2端子対回路のパラメータも6種類がある。ここでは、よく使われる3種類を勉強する。

- また、以下で入力電圧・電流を正弦波交流に限定するので、$\dot{i}_1, v_1, \dot{i}_2, v_2$ はそれぞれ $\dot{I}_1, \dot{V}_1, \dot{I}_2, \dot{V}_2$ で表す。

14.2 代表的な2端子対バラメータ

1. Z パラメータ

$\dot{I}_1, \dot{I}_2$ を x_1, x_2 に、$\dot{V}_1, \dot{V}_2$ を y_1, y_2 に割り当てると、回路の特性は次式で表される。

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \dot{Z}_{11}\dot{I}_1 + \dot{Z}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \dot{Z}_{21}\dot{I}_1 + \dot{Z}_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

$$a_{ij} \Rightarrow \dot{Z}_{ij}, \;\; i, j = 1, 2$$

- 上式は次の行列表示の形で表せる。

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12} \\ \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

Z行列

- その係数行列をZ行列という。
  Z行列の要素はZパラメータという。

Zパラメータはいかに求めるか？

- Zパラメータは次のように求められる。

$$\dot{Z}_{11} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} =$$ 出力端開放入力インピーダンス

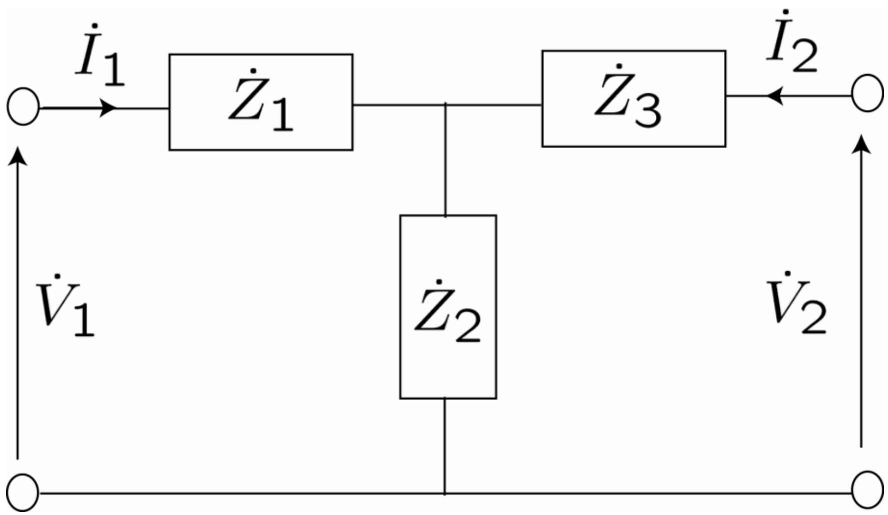
$$\dot{Z}_{12} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0} =$$ 入力端開放伝達インピーダンス

$$\dot{Z}_{21} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} =$$ 出力端開放伝達インピーダンス

$$\dot{Z}_{22} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0} =$$ 入力端開放出力インピーダンス

例題14-1

次のT型回路のZパラメータを求めよ。



解: $\dot{I}_2 = 0$のとき、

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \Rightarrow \dot{Z}_{11} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2$$

$$\dot{V}_2 = \dot{Z}_2 \dot{I}_1 \ \Rightarrow \ \dot{Z}_{21} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} = \dot{Z}_2$$

- $\dot{I}_1 = 0$ のとき、

$$\dot{V}_1 = \dot{Z}_2 \dot{I}_2 \ \Rightarrow \ \dot{Z}_{12} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0} = \dot{Z}_2$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_2}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3} \ \Rightarrow \ \dot{Z}_{22} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0} = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3$$

- よって、

$$\begin{cases} \dot{Z}_{11} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_{12} = \dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_{21} = \dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_{22} = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12} \\ \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 & \dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_2 & \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. Yパラメータ

$\dot{V}_1, \dot{V}_2$ を x_1, x_2 に、$\dot{I}_1, \dot{I}_2$ を y_1, y_2 に割り当てると、回路の特性は次式で表される。

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{Y}_{11}\dot{V}_1 + \dot{Y}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \dot{Y}_{21}\dot{V}_1 + \dot{Y}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} \\ \dot{Y}_{21} & \dot{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix}$$

この係数行列はY行列、その要素はYパラメータという。

- Yパラメータは次のように求められる。

$$\dot{Y}_{11} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1}\right|_{\dot{V}_2=0} = \text{出力端短絡入力アドミッタンス}$$

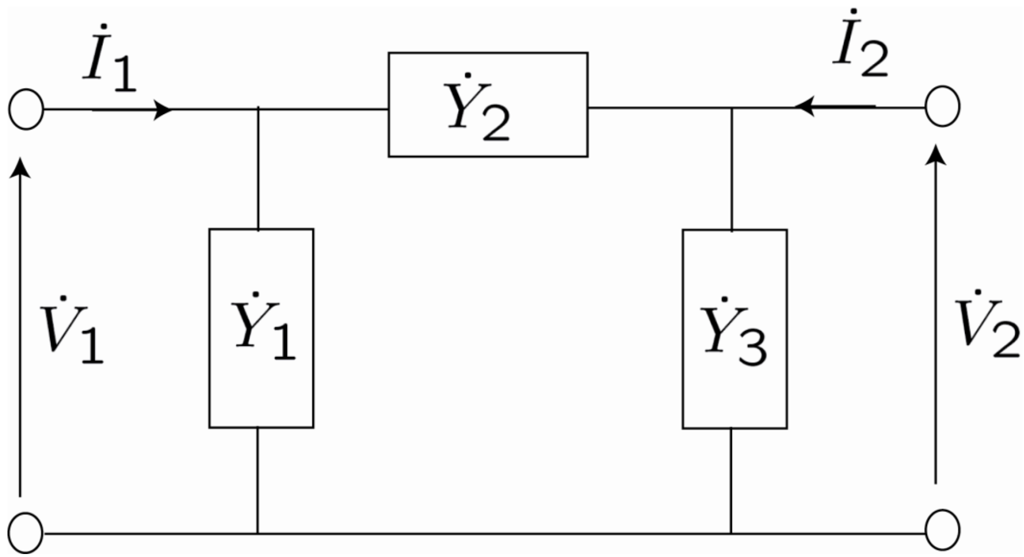
$$\dot{Y}_{12} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{V}_1=0} = \text{入力端短絡伝達アドミッタンス}$$

$$\dot{Y}_{21} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_1}\right|_{\dot{V}_2=0} = \text{出力端短絡伝達アドミッタンス}$$

$$\dot{Y}_{22} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{V}_1=0} = \text{入力端短絡出力アドミッタンス}$$

例題14-2

- 次のπ型回路のYパラメータを求めよ。



- $\dot{V}_2 = 0$のとき

$$\dot{I}_1 = (\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2)\dot{V}_1 \ \Rightarrow \ \dot{Y}_{11} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1}\right|_{\dot{V}_2=0} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2$$

$$\dot{I}_2 = -\dot{Y}_2\dot{V}_1 \;\Rightarrow\; \dot{Y}_{21} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_1}\right|_{\dot{V}_2=0} = -\dot{Y}_2$$

- $\dot{V}_1 = 0$のとき

$$\dot{I}_1 = -\dot{Y}_2\dot{V}_2 \;\Rightarrow\; \dot{Y}_{12} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{V}_1=0} = -\dot{Y}_2$$

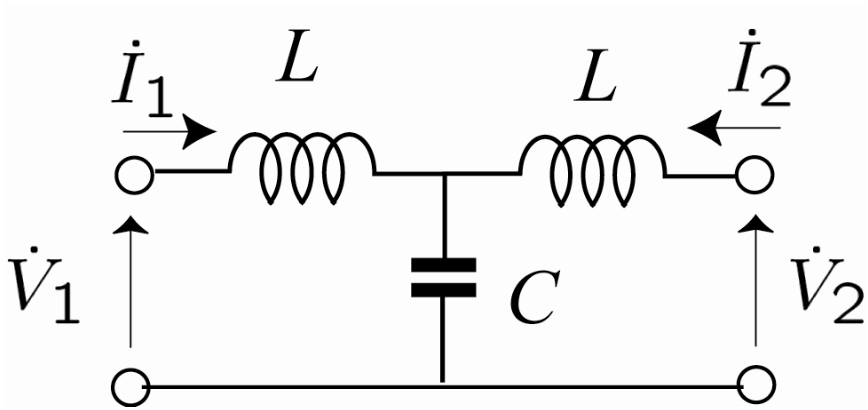
$$\dot{I}_2 = (\dot{Y}_2 + \dot{Y}_3)\dot{V}_2 \;\Rightarrow\; \dot{Y}_{22} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{V}_1=0} = \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3$$

- よって、 $$\begin{cases} \dot{Y}_{11} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 \\ \dot{Y}_{12} = -\dot{Y}_2 \\ \dot{Y}_{21} = -\dot{Y}_2 \\ \dot{Y}_{22} = \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 \end{cases}$$

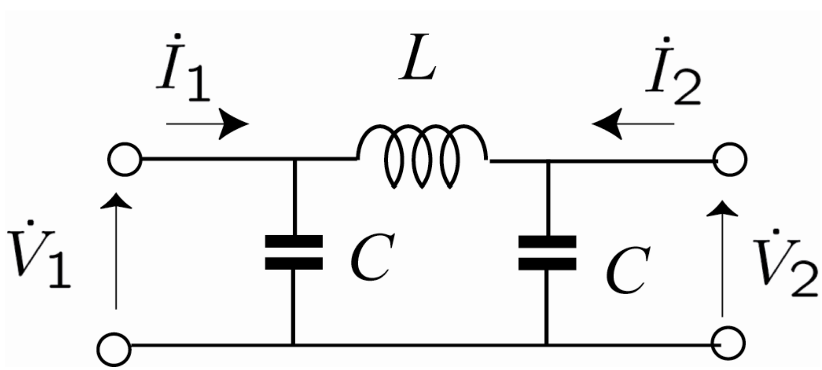
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} \\ \dot{Y}_{21} & \dot{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 & -\dot{Y}_2 \\ -\dot{Y}_2 & \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

演習問題

問題1： 次のT型2端子対回路のZ パラメータを求めよ。



問題2： 次のπ型2端子対回路のY パラメータを求めよ。



- 演習問題1の解答:

$$\begin{cases} \dot{Z}_{11} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \\ \dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21} = \frac{1}{j\omega C} \\ \dot{Z}_{22} = \frac{1}{j\omega C} + j\omega L \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L + \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} + j\omega L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

- 演習問題2の解答:

$$\begin{cases} \dot{Y}_{11} = j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \\ \dot{Y}_{12} = \dot{Y}_{21} = -\frac{1}{j\omega L} \\ \dot{Y}_{22} = \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{c} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} j\omega C + \frac{1}{j\omega L} & -\frac{1}{j\omega L} \\ -\frac{1}{j\omega L} & \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{array} \right]$$

3. Fパラメータ

次の2端子対回路を考える。

この電流の方向が逆であることにご注意！！

Fパラメータ

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{A} & \dot{B} \\ \dot{C} & \dot{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

入力側と出力側が式の左辺と右辺に分離され、縦続接続回路の計算に便利である特徴を持つ。

- Fパラメータは次のように求められる。

$$\dot{A} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{I}_2=0} = \text{出力端開放電圧転送比の逆数}$$

$$\dot{B} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{V}_2=0} = \text{出力端短絡伝達アドミッタンスの逆数}$$

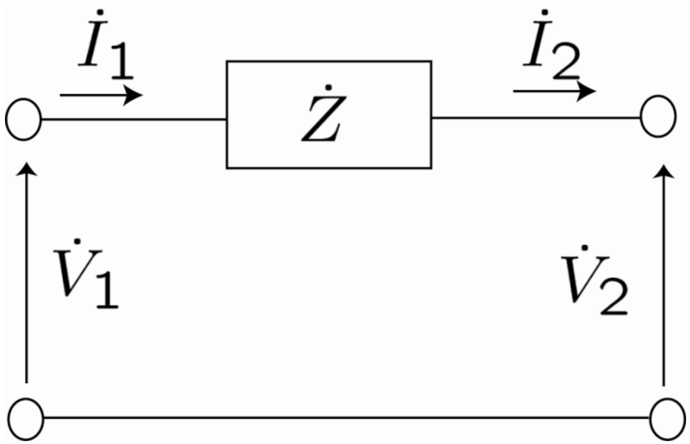
$$\dot{C} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{I}_2=0} = \text{出力端開放伝達インピーダンスの逆数}$$

$$\dot{D} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{V}_2=0} = \text{出力端短絡電流転送比の逆数}$$

例題4-3 (P147演習問題1）

- 次の各回路のFパラメータを求めよ。

(a)



解： この回路において、$\dot{I}_1 = \dot{I}_2$ である。

従って、$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = 0$ のとき、$\dot{V}_1 = \dot{V}_2$

$$\dot{A} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{I}_2=0} = 1,\ \dot{C} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{I}_2=0} = 0$$

- また、$\dot{V}_2 = 0$ のとき、$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \dfrac{\dot{V}_1}{\dot{Z}}$

$$\Rightarrow \quad \dot{B} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{V}_2=0} = \dot{Z}, \quad \dot{D} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{V}_2=0} = 1$$

よって、

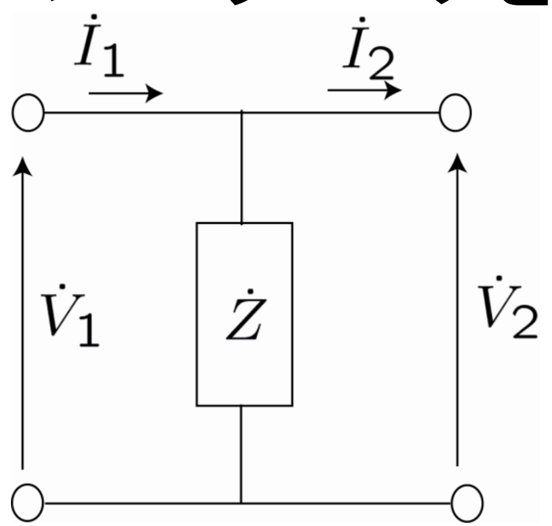
$$\begin{bmatrix} \dot{A} & \dot{B} \\ \dot{C} & \dot{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dot{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dot{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}.$$

例題4-3 (P147演習問題1）

- 次の各回路のFパラメータを求めよ。

(b)



解：　この回路において、$\dot{V}_1 = \dot{V}_2$である。

$\dot{I}_2 = 0$ のときも、$\dot{V}_1 = \dot{V}_2$

$$\Rightarrow \quad \dot{A} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{I}_2=0} = 1$$

- このとき、$\dot{I}_1 = \dfrac{\dot{V}_1}{\dot{Z}} = \dfrac{\dot{V}_2}{\dot{Z}}$

$$\Rightarrow \quad \dot{C} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{I}_2=0} = \frac{1}{\dot{Z}}$$

- また、$\dot{V}_2 = 0$のとき、

$$\dot{V}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{B} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{V}_2=0} = 0$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{D} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{V}_2=0} = 1$$

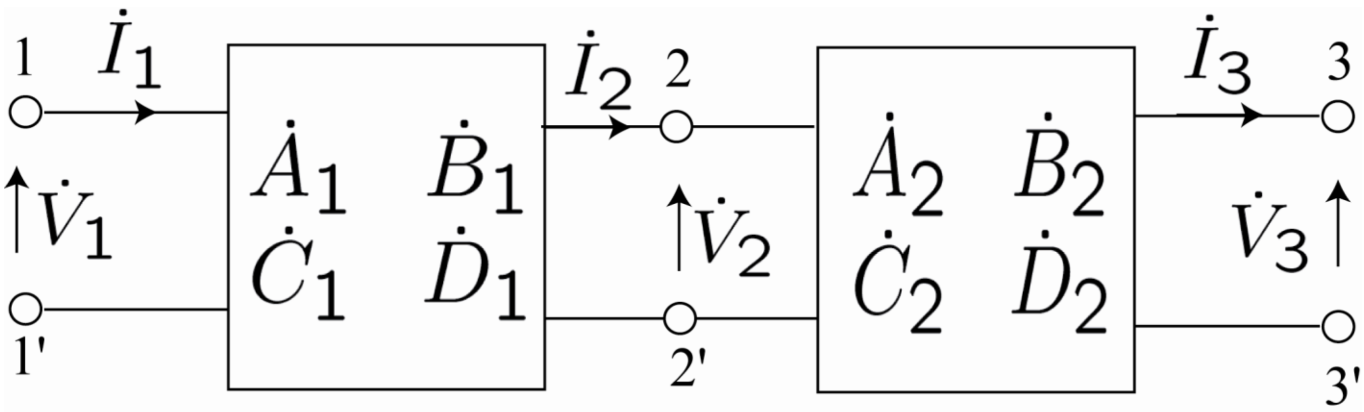
よって、

$$\begin{bmatrix} \dot{A} & \dot{B} \\ \dot{C} & \dot{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\dot{Z}} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\dot{Z}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}.$$

14-3 2端子対回路の縦続接続

- 二つのFパラメータを持つ2端子対回路を次の形で接続する方法は縦続接続という。



- Fパラメータの定義より、

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{A}_1 & \dot{B}_1 \\ \dot{C}_1 & \dot{D}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{A}_2 & \dot{B}_2 \\ \dot{C}_2 & \dot{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_3 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix}.$$

- を消去すれば、

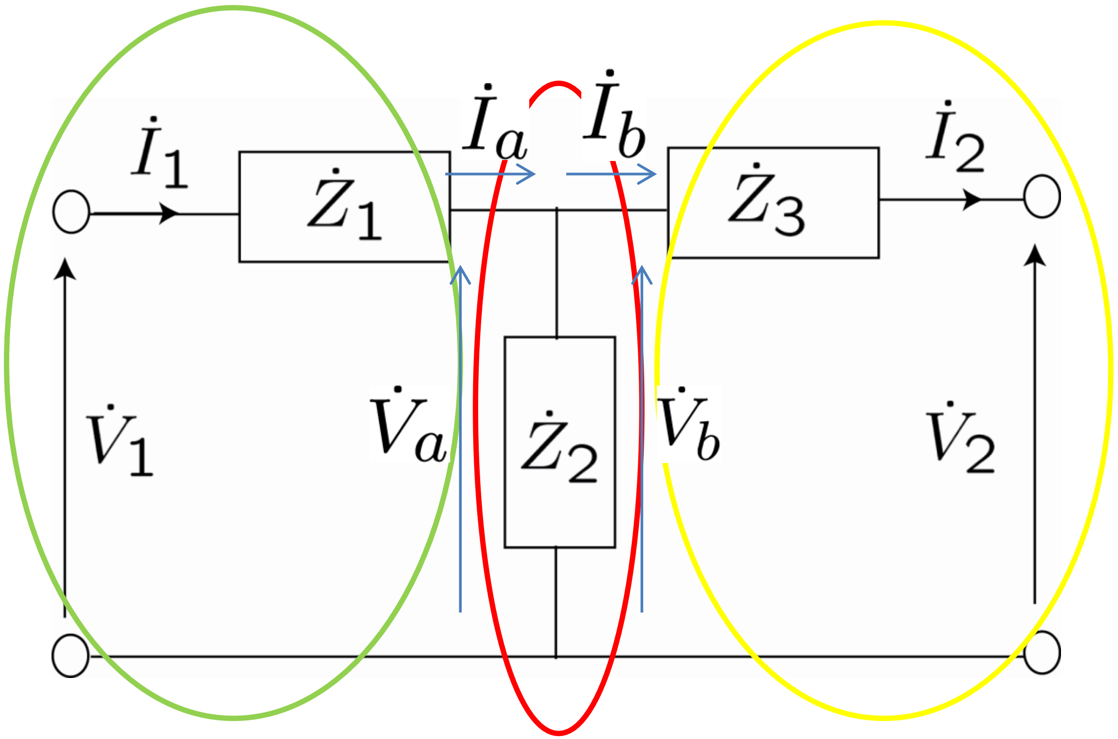
$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{A}_1 & \dot{B}_1 \\ \dot{C}_1 & \dot{D}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{A}_2 & \dot{B}_2 \\ \dot{C}_2 & \dot{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_3 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{A}_1\dot{A}_2 + \dot{B}_1\dot{C}_2 & \dot{A}_1\dot{B}_2 + \dot{B}_1\dot{D}_2 \\ \dot{C}_1\dot{A}_2 + \dot{D}_1\dot{C}_2 & \dot{C}_1\dot{B}_2 + \dot{D}_1\dot{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_3 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix}$$

例題4-4

- 次の各回路のFパラメータを求めよ。

(a)



- 前の例題の結果より、

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dot{Z}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_a \\ \dot{I}_a \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_a \\ \dot{I}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\dot{Z}_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_b \\ \dot{I}_b \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_b \\ \dot{I}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dot{Z}_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}.$$

- また、縦続接続の計算で

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix}
&= \begin{bmatrix} 1 & \dot{Z}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\dot{Z}_2} & 1 \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} 1 & \dot{Z}_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 + \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} & \dot{Z}_1 \\ \frac{1}{\dot{Z}_2} & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & \dot{Z}_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\dot{Z}_1+\dot{Z}_2}{\dot{Z}_2} & \frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{Z}_2\dot{Z}_3+\dot{Z}_3\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} \\ \frac{1}{\dot{Z}_2} & \frac{\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$