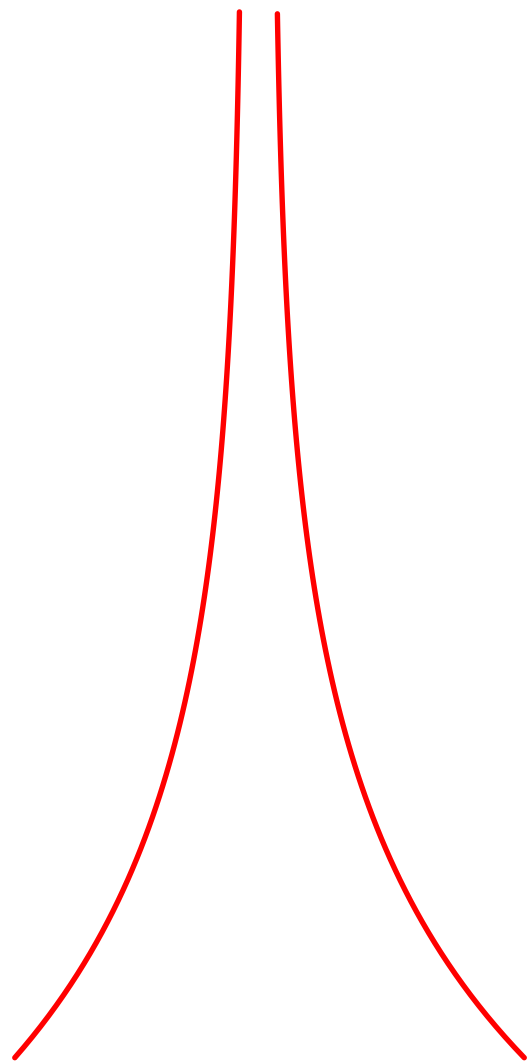
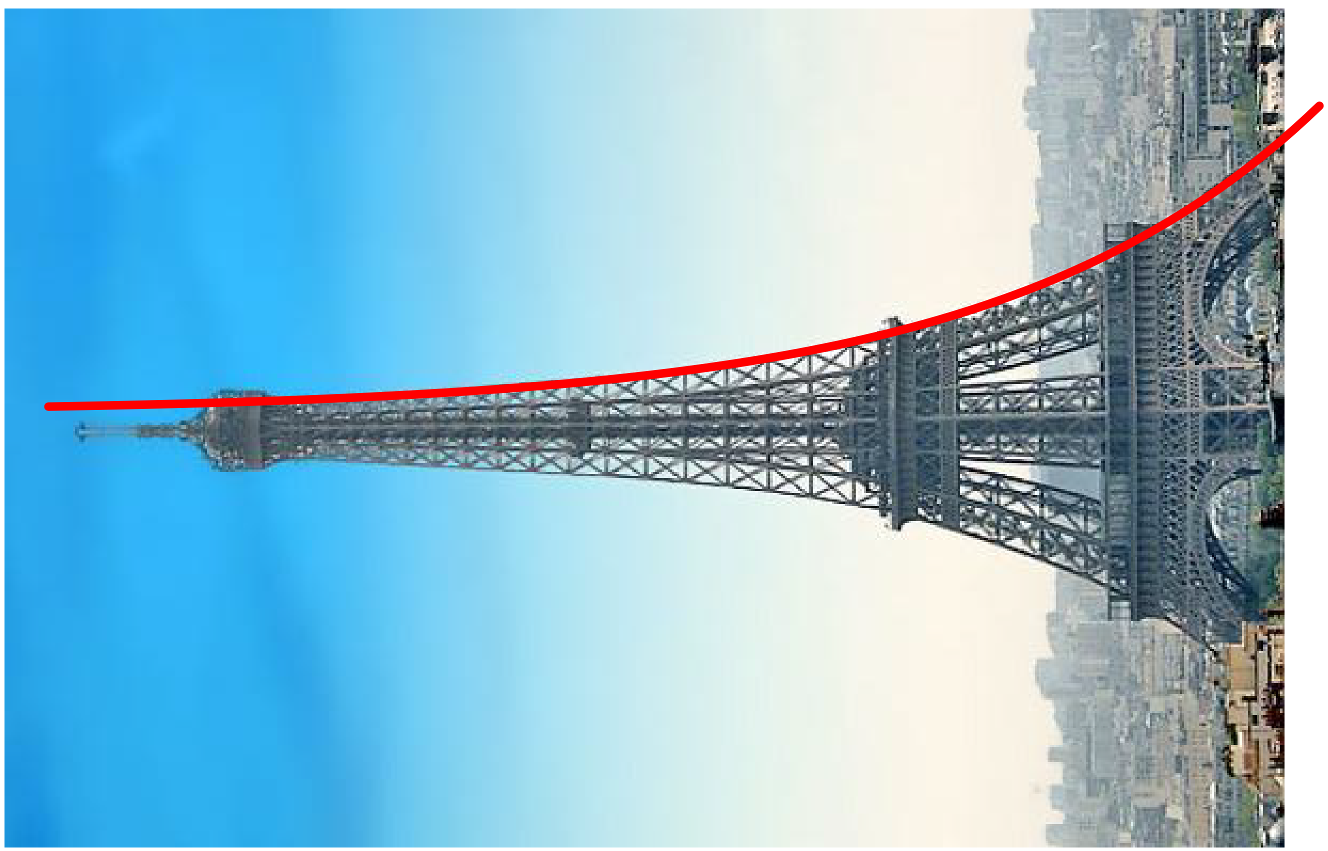
2. DIE EXPONENTIALFUNKTION

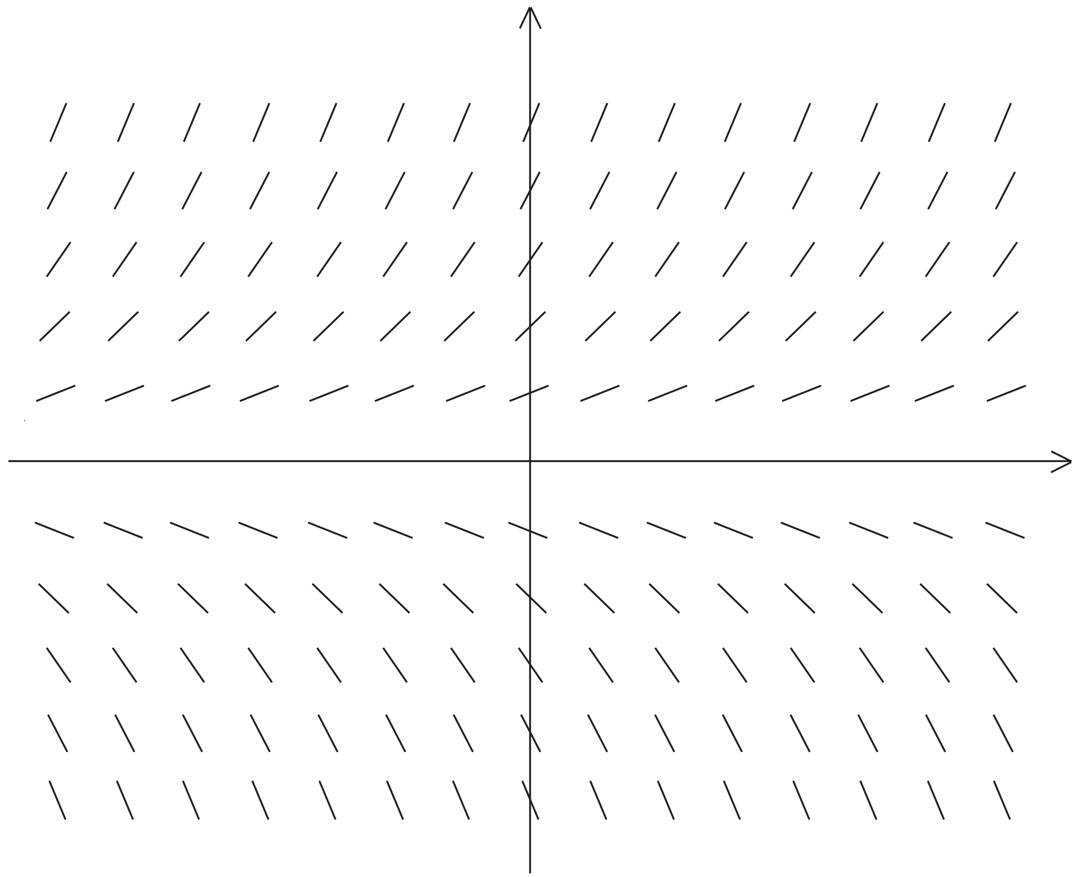
exp





Wir kommen später auf den Eiffelturm zurück.

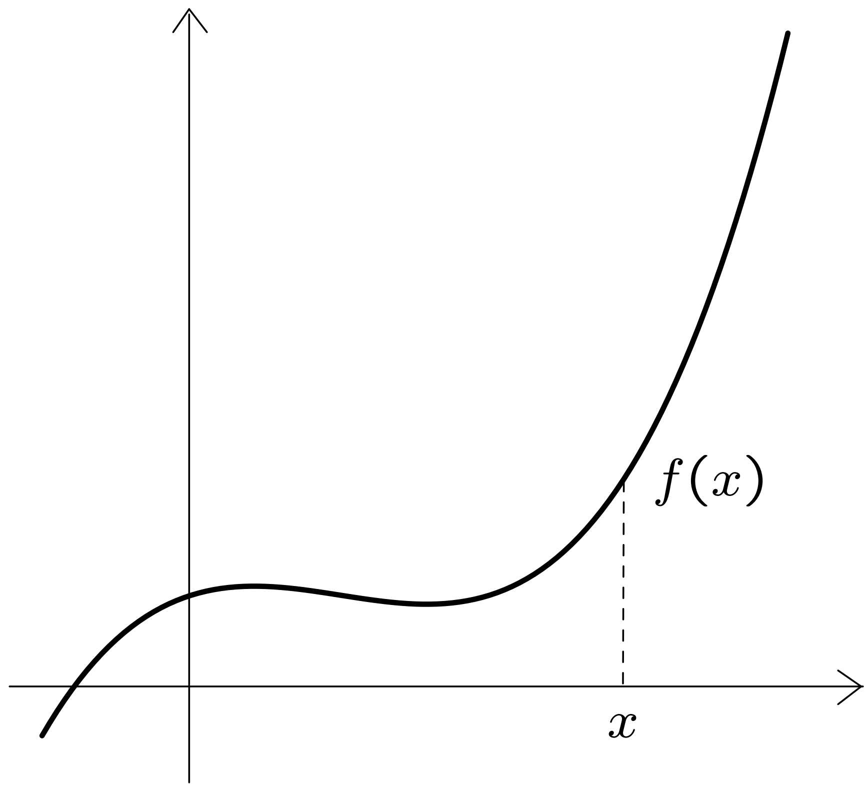
Ein zugehöriges Steigungsfeld:



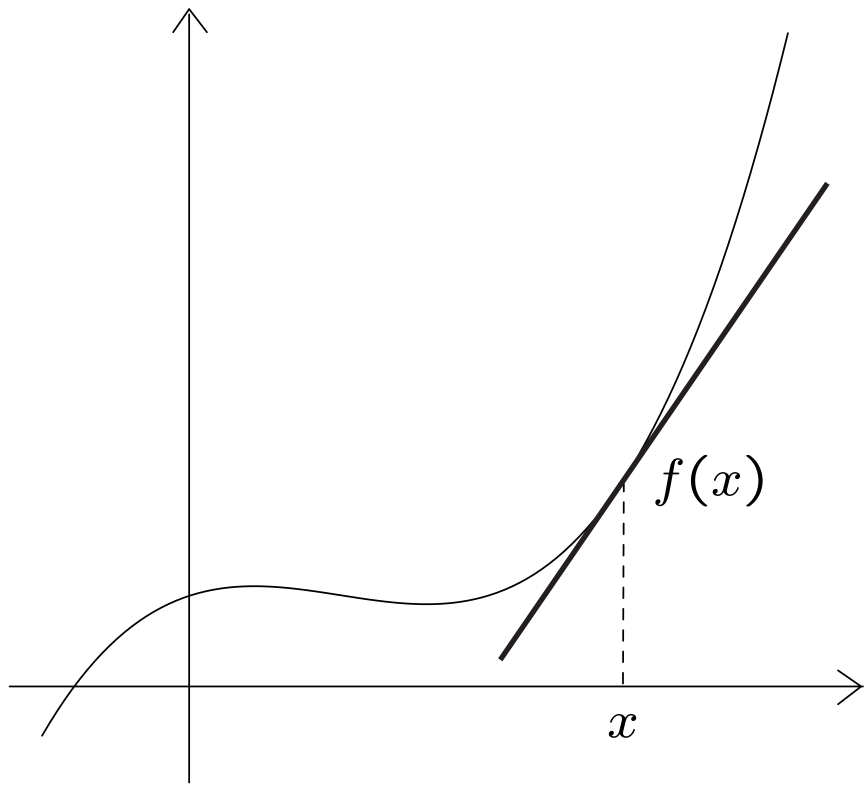
Wir erinnern:

Ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion,

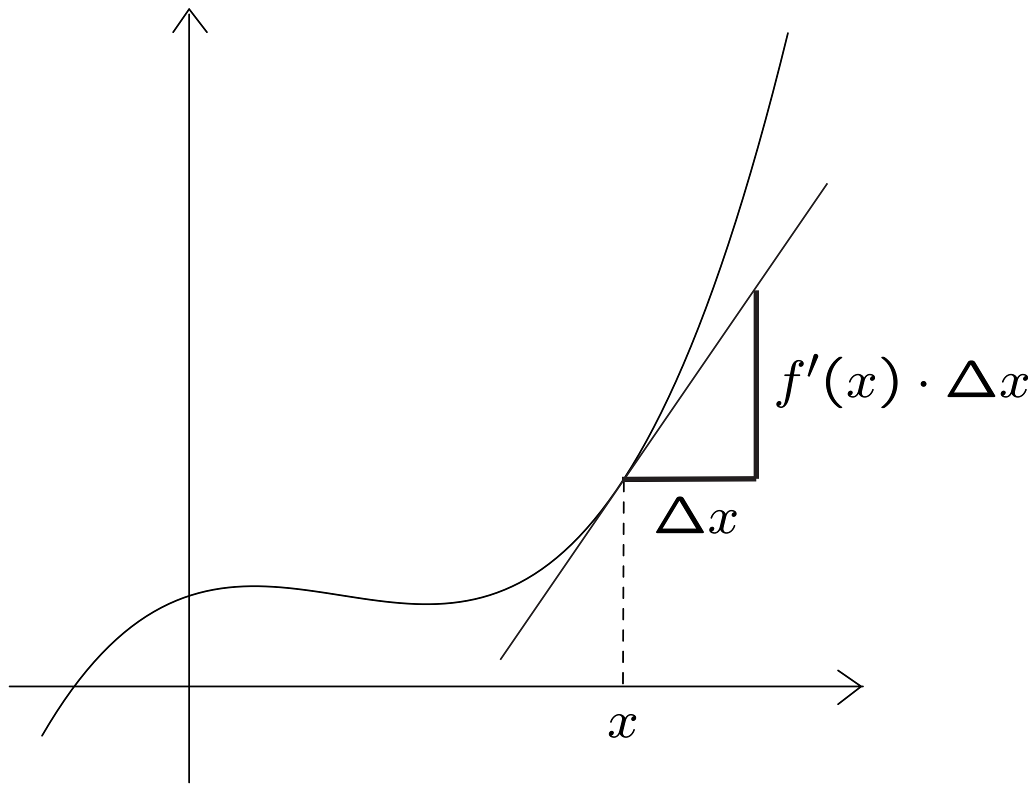
dann bezeichnet $f'(x)$ die *Steigung* von f in x.



$f(x)$
x



$f(x)$
x


$f'(x) \cdot \Delta x$
Δx
x

Wie sehen Funktionen aus mit

$$f'(x) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$?

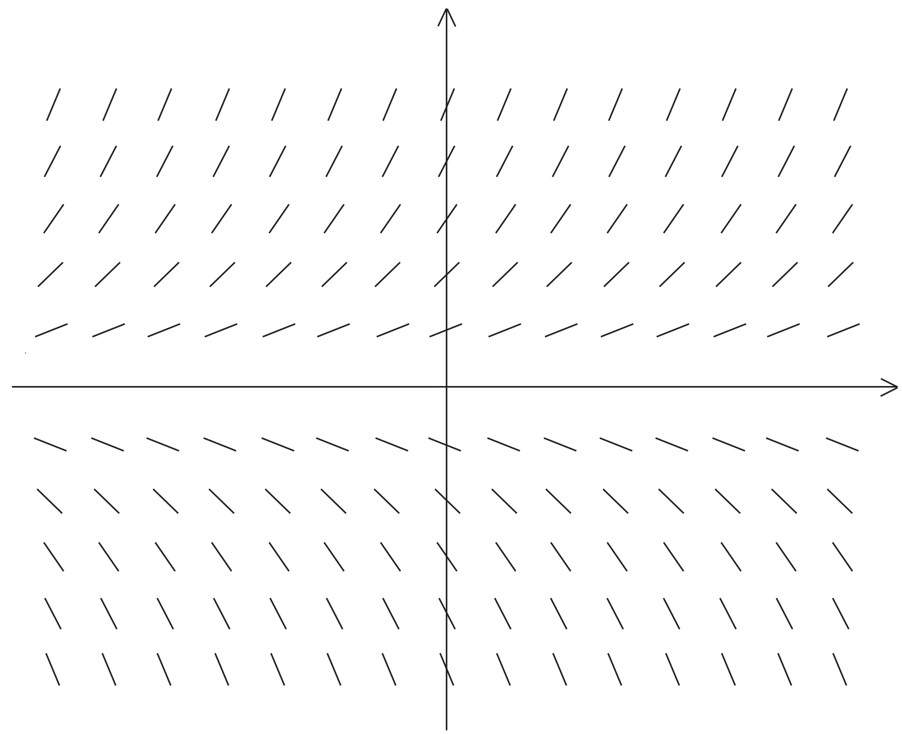
„Steigung gleich Funktionswert“

Wie sehen Funktionen aus mit

$$f'(x) = f(x)$$

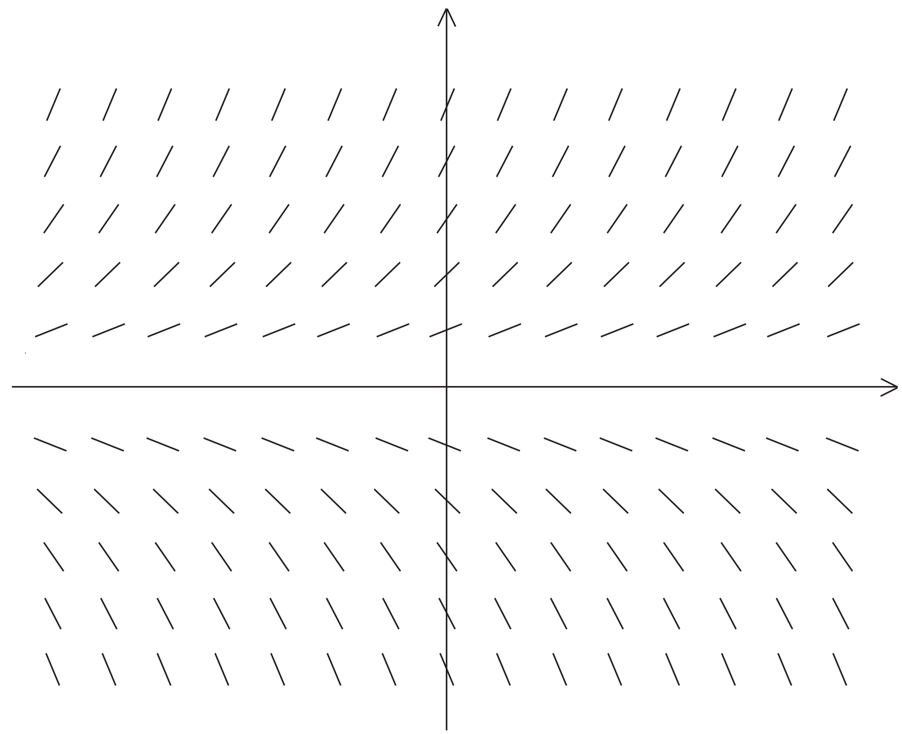
für alle $x \in \mathbb{R}$?

„Steigung gleich Funktionswert“



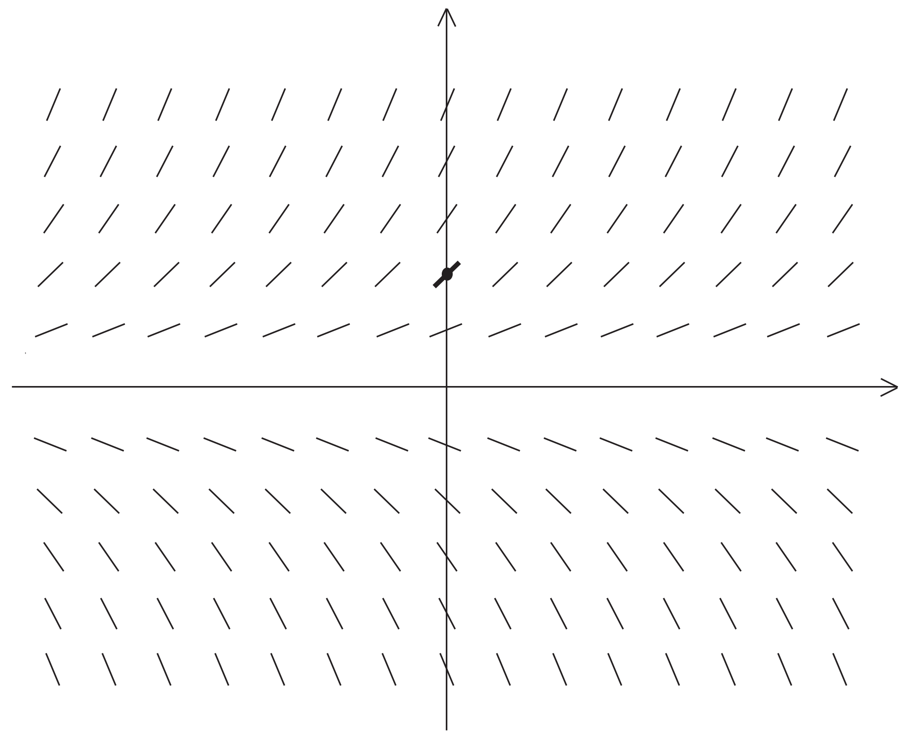
Funktionen f mit $f' = f$ gibt es viele,

aber durch jeden Punkt (x_0, y_0)



Funktionen f mit $f' = f$ gibt es viele,

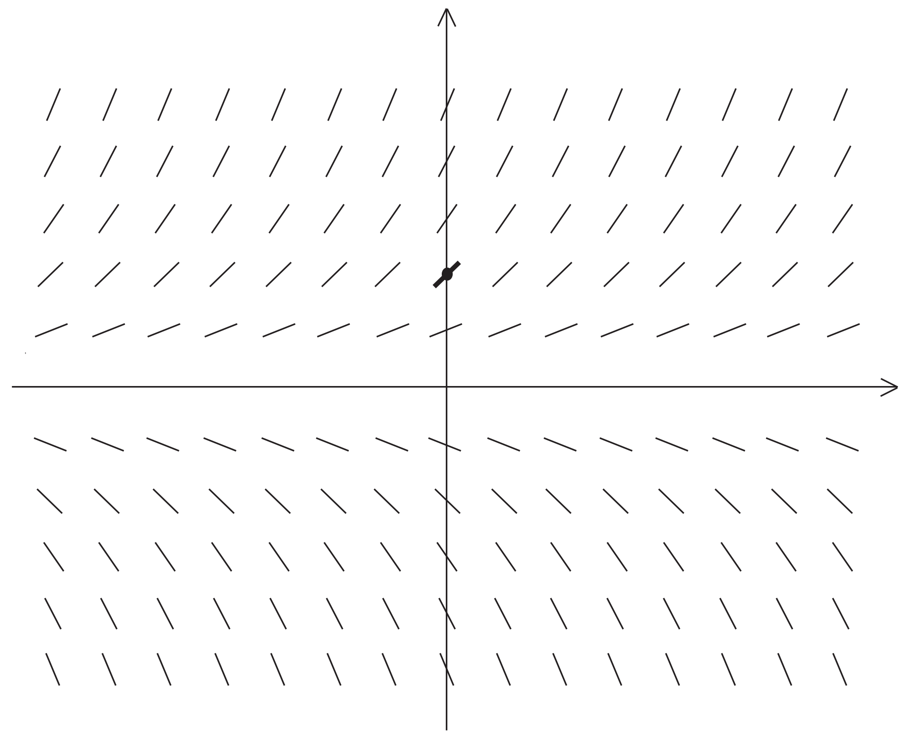
aber durch jeden Punkt (x_0, y_0)



Funktionen f mit $f' = f$ gibt es viele,

aber durch jeden Punkt (x_0, y_0)

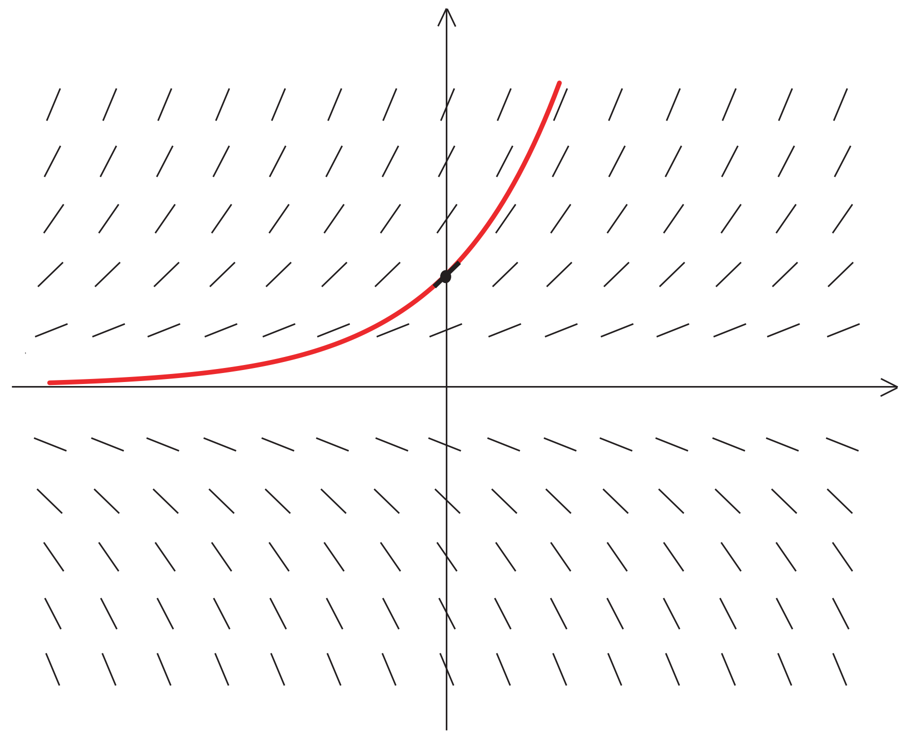
gibt es genau eine!



Funktionen f mit $f' = f$ gibt es viele,

aber durch jeden Punkt (x_0, y_0)

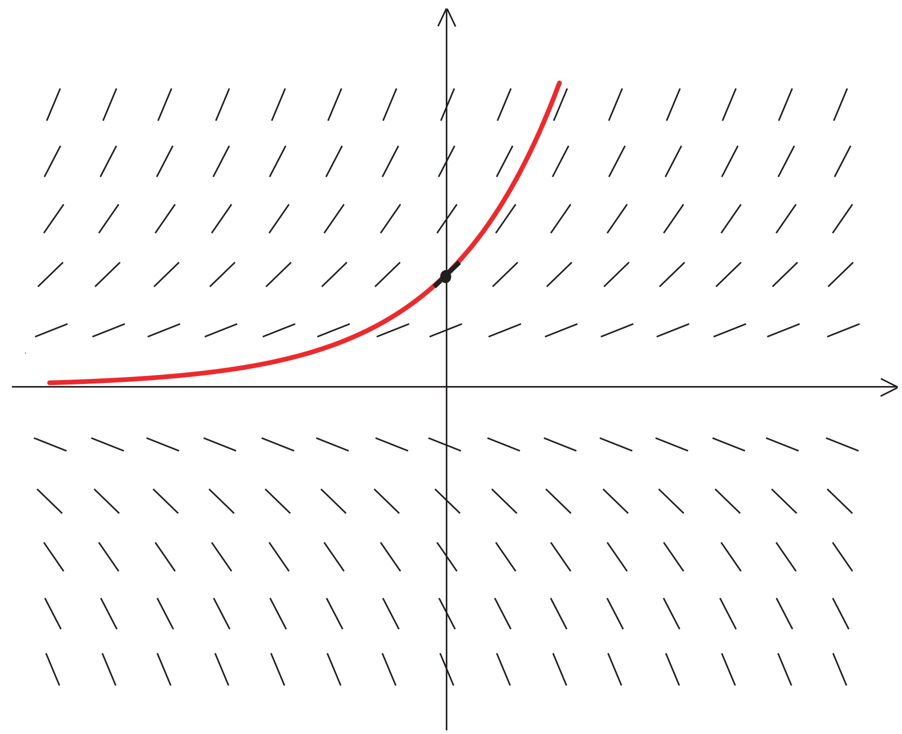
gibt es genau eine!



Speziell:

$$(x_0, y_0) = (0, 1)$$

$$f(0) = 1$$



Satz. *Es gibt genau eine Funktion* f *mit*

$$f'(x) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ *und*

$$f(0) = 1 \ .$$

Dies ist einleuchtend, später kommen wir auf den Beweis noch einmal zurück. Man schreibt diese Funktion

$$\exp(x)$$

und nennt sie die *Exponentialfunktion* oder e-*Funktion*.

Also:

$$\boxed{\exp'(x) = \exp(x)\ ,\ \exp(0) = 1}$$

Bemerkung: Es folgt, dass $g(x) = a\exp(bx)$ die Gleichungen

$$g'(x) = bg(x) \quad \text{und} \quad g(0) = a$$

Die Exponentialfunktion benutzt man deswegen, um Prozesse mit der Eigenschaft

Wachstumsgeschwindigkeit proportional zur erreichten Größe

zu modellieren.

Beispiele:
unbegrenztes Wachstum einer Population (Bakterienkolonie)
Moore'sches Gesetz (s.u.)

Wie kann man $\exp(x)$ berechnen?

Eine Möglichkeit:

$$f(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots$$

Denn: $f(0) = 1$,

und man darf summandenweise ableiten

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 + 1 + \frac{2x}{2} + \frac{3x^2}{2 \cdot 3} + \frac{4x^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{5x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots = f(x) \end{aligned}$$

Wir haben gefunden

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots$$

Mit der Bezeichnung $n! := 1 \cdot 2 \cdots n$ (lies „n Fakultät“) und der Konvention $0! := 1$ schreibt sich $\exp(x)$ als unendliche Summe

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ist die Darstellung von exp als „Exponentialreihe“.

Die *Eulersche Zahl* e ist der Wert von exp bei $x = 1$

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \cdots \approx 2{,}718$$

Die fundamentale Eigenschaft der e-Funktion ist ihre *Multiplikativität*:

$$\boxed{\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)}$$

Wie sieht man das ein?

Zum Beweis betrachten wir die Funktion

$$g(x) := \exp(a+x)/\exp(a)$$

Dann gilt $g(0) = 1$ und

$$g'(x) = \exp(a+x) \cdot 1/\exp(a) = g(x)$$

$g(x)$ erfüllt also genau die charakteristische Eigenschaft der e-Funktion. Es folgt

$$\exp(a+x)/\exp(a) = g(x) = \exp(x)$$

und durch Multiplikation mit $\exp(a)$ die behauptete Multiplikativität.

Wieso „Exponentialfunktion“?

$$\begin{aligned}
\exp(0) &= 1 = e^0 \\
\exp(1) &= e = e^1 \\
\exp(2) &= \exp(1+1) = e \cdot e = e^2 \\
\exp(3) &= \exp(1+1+1) = e \cdot e \cdot e = e^3
\end{aligned}$$

allgemein

$$\exp(m) = \exp\Big(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{m-\text{mal}}\Big) = \underbrace{e \cdots e}_{m-\text{mal}} = e^m$$

Umgekehrt:

$$e = \exp(1) = \exp(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}) = \exp(\tfrac{1}{2}) \exp(\tfrac{1}{2})$$

$$e = \exp(1) = \exp(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}) = \exp(\tfrac{1}{3}) \exp(\tfrac{1}{3}) \exp(\tfrac{1}{3})$$

also

$$\exp(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{e} = e^{1/2}\ , \ \exp(\tfrac{1}{3}) = \sqrt[3]{e} = e^{1/3}$$

allgemeiner

$$\exp(\tfrac{1}{n}) = \sqrt[n]{e} = e^{1/n}$$

Wir haben gesehen

$$\exp(m) = e^m \ , \quad \exp(\tfrac{1}{n}) = e^{1/n}$$

und damit

$$\exp(\tfrac{m}{n}) = \exp(\tfrac{1}{n} + \cdots + \tfrac{1}{n}) = \exp(\tfrac{1}{n}) \cdots \exp(\tfrac{1}{n})$$

bzw.

$$\exp(\tfrac{m}{n}) = e^{m/n}$$

Außerdem:

$$\exp(-x)\exp(x) = \exp(-x+x) = \exp(0) = 1$$

also

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} = \exp(x)^{-1}$$

und schließlich für alle rationalen Zahlen $r = \pm\frac{m}{n}$

$$\exp(r) = e^r$$

Damit haben wir die e-Funktion identifiziert als Exponentialfunktion zur Basis e erkannt.

$$\exp(x) = e^x \quad \text{für alle reellen Zahlen } x\ .$$

(Wenn man will, kann man diese Gleichung als Definition von e^x lesen, denn $\exp(x)$ ist für alle x erklärt, e^x zunächst einmal aber nur für rationale x.)

Zum Merken:

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist charakterisiert durch die Gleichungen

$$\exp(0) = 1 \quad , \quad \exp' = \exp$$

Sie ist multiplikativ

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

Sie lässt sich als unendliche Reihe

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

darstellen bzw. berechnen. Sie ist die Exponentialfunktion

$$\exp(x) = e^x$$

die Basis ist die Euler'sche Zahl $e = \exp(1) \approx 2,718$