# Antilles Guyane septembre 2015. Enseignement spécifique

**EXERCICE 1 (6 points) (commun à tous les candidats)**

Soit $n$ un entier naturel non nul.
On considère la fonction $f_n$ définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f_n(x) = x^2 e^{-2nx}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction $f_n$ dans un repère orthogonal.
On définit, pour tout entier naturel $n$ non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

**Partie A : étude de la fonction $f_1$**

**1)** La fonction $f_1$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^2 e^{-2x}$.
On admet que $f_1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note $f_1'$ sa dérivée.

**a)** Justifier que pour tout réel $x$, $f_1'(x) = 2xe^{-2x}(1-x)$.

**b)** Etudier les variations de la fonction $f_1$ sur $\mathbb{R}$.

**c)** Déterminer la limite de $f_1$ en $-\infty$.

**d)** Vérifier que pour tout réel $x$, $f_1(x) = \left(\dfrac{x}{e^x}\right)^2$. En déduire la limite de $f_1$ en $+\infty$.

**2)** En utilisant un système de calcul formel, on trouve qu'une primitive $F_1$ de la fonction $f_1$ est donnée par

$$F_1(x) = -e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right).$$

En déduire la valeur exacte de $I_1$.

**Partie B : étude de la suite $(I_n)$**

**1)** Soit $n$ un entier naturel non nul.

**a)** Interpréter graphiquement la quantité $I_n$.

**b)** Emettre alors une conjecture sur le sens de variation et sur la limite éventuelle de la suite $(I_n)$.
Expliciter la démarche qui a mené à cette conjecture.

**2) a)** Justifier que, pour tout entier naturel $n$ non nul et pour tout réel $x$ appartenant à $[0,1]$,

$$f_{n+1}(x) = e^{-2x} f_n(x).$$

**b)** En déduire, pour tout entier naturel $n$ non nul et pour tout réel $x$ appartenant à $[0,1]$,

$$f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x).$$

**c)** Déterminer alors le sens de variation de la suite $(I_n)$.

**3)** Soit $n$ un entier naturel non nul.

**a)** Justifier que pour tout entier naturel $n$ non nul et pour tout réel $x$ appartenant à $[0,1]$,

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-2nx}.$$

**b)** En déduire un encadrement de la suite $(I_n)$, puis sa limite.

 

# Antilles Guyane septembre 2015. Enseignement spécifique

**EXERCICE 1 : corrigé**

**Partie A : étude de la fonction $f_1$**

**1) a)** $f_1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$,

$$f_1'(x) = 2x \times e^{-2x} + x^2 \times \left(-2e^{-2x}\right) = \left(2x - 2x^2\right) e^{-2x} = 2xe^{-2x}(1-x).$$

**b)** Pour tout réel $x$, $2e^{-2x} > 0$. Donc, pour tout réel $x$, $f_1'(x)$ est du signe de $x(1-x)$. $x(1-x)$ est un trinôme du second degré degré qui admet deux racines réelles distinctes à savoir $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$. Le cours sur le signe d'un trinôme du second degré nous permet de dresser le tableau de variations de le fonction $f_1$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_1$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $e^{-2}$ | $\searrow$ | $0$ |

**c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$. En multipliant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty.}$$

**d)** Pour tout réel $x$,

$$f_1(x) = x^2e^{-2x} = \frac{x^2}{e^{2x}} = \frac{x^2}{\left(e^x\right)^2} = \left(\frac{x}{e^x}\right)^2.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. En prenant l'inverse, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0^2 = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0.}$$

**2)** $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,dx = \left[-e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)\right]_0^1 = -e^{-2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + e^0\left(0 + 0 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}e^{-2}.$

$$\boxed{I_1 = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}e^{-2}.}$$

**Partie B : étude de la suite $(I_n)$**

**1) a)** Soit $n$ un entier naturel non nul. La fonction $f_n$ est continue et positive sur $[0,1]$. Donc, $I_n$ est l'aire exprimée en unités d'aire du doamine du plan compris entre l'axe $(Ox)$ et la courbe $\mathscr{C}_n$ d'une part et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ d'autre part.

**b)** Les tracés des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ à la calculatrice suggèrent que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$.

**2) a)** Soit $n$ un entier naturel non nul. Pour tout réel $x$ de $[0,1]$,

$$f_{n+1}(x) = x^2e^{-2(n+1)x} = x^2e^{-2nx-2x} = x^2e^{-2nx} \times e^{-2x} = e^{-2x}f_n(x).$$

**b)** Soit $n$ un entier naturel non nul. Pour tout réel $x$ de $[0,1]$, on a $-2x \leqslant 0$ et donc $e^{-2x} \leqslant 1$. En multipliant les deux membres de cette inégalité par le réel positif $f_n(x)$, on obtient $e^{-2x}f_n(x) \leqslant e^{-nx}$ ou encore $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$.

**c)** Soit $n$ un entier naturel non nul. Pour tout réel $x$ de $[0,1]$, on a $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,dx$ ou encore que $I_{n+1} \leqslant I_n$. Ainsi, pour tout entier naturel non nul $n$, $I_{n+1} \leqslant I_n$ et donc

 

$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$

**3) a)** Soit $n$ un entier naturel non nul. Pour tout réel $x$ de $[0,1]$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$. En multipliant les trois membres de cet encadrement par le réel positif $e^{-2nx}$, on obtient $0 \leqslant x^2 e^{-nx} \leqslant e^{-2nx}$ ou encore $0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-2nx}$.

**b)** Soit $n$ un entier naturel non nul. Pour tout réel $x$ de $[0,1]$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-2nx}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{-2nx}\, dx$ avec

$$\int_0^1 e^{-2nx}\, dx = \left[-\frac{1}{2n}e^{-2nx}\right]_0^1 = -\frac{e^{-2n}}{2n} + \frac{e^0}{2n} = \frac{1-e^{-2n}}{2n}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1-e^{-2n}}{2n}.}$$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{-2n} = \lim_{X\to-\infty} e^X = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - e^{-2n} = 1$. D'autre part, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2n = +\infty$. En divisant, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-2n}}{2n} = 0$.

Mais alors, l'encadrement précédent et le théorème des gendarmes fournissent

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

 