

# APLICACIÓN EDUCATIVA DE LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS PARA EL APRENDIZAJE DE TRANSFORMACIONES LINEALES

María Inés Ciancio; Elisa Silvia Oliva  
Universidad Nacional de San Juan  
San Juan (Argentina)  
[mciancio@iinfo.edu.ar](mailto:mciancio@iinfo.edu.ar) - [eoliva@iinfo.edu.ar](mailto:eoliva@iinfo.edu.ar)

## INTRODUCCIÓN

El estudiante debe jugar un papel activo en el proceso de su propio aprendizaje para que este resulte eficaz. Para desarrollar su capacidad intelectual se necesitan métodos de enseñanza en los que el estudiante sea un agente activo, y para alcanzar esta propuesta, hoy en día, se requiere insertar recursos didáctico-tecnológicos en nuestras aulas distintos a los que se utilizan en la educación tradicional. Se evidencia así la necesidad de revitalizar y agilizar la enseñanza de las ciencias y en particular de matemática, aplicando las nuevas tecnologías disponibles en nuestra sociedad.

El desarrollo y la utilización de estas nuevas tecnologías conducen a cambios profundos en la sociedad, dado que pueden modificar las condiciones naturales de trabajo y provocar cambios sustanciales en los planteamientos de la educación, en esta línea: estas modificaciones favorecen la potenciación del desarrollo cognitivo del alumno y hasta el desarrollo de nuevos materiales educativos.

Esta propuesta de experiencia de trabajo se lleva a delante con los alumnos del primer año de las carreras de Licenciatura en Geofísica y Licenciatura en Astronomía de la Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de San Juan.

La metodología utilizada en esta experiencia conduce al docente a un contexto en donde cede un paso a su protagonismo en la “transmisión” y “apropiación” de contenidos, para transformarse en un “organizador” de instancias de aprendizaje y “colaborador” de un proceso de construcción conjunta con los alumnos.

Se plantea el uso de **Recursos Tecnológicos**: *Página Web* (para desarrollar los contenidos teóricos de la unidad de *Transformaciones Lineales* de Álgebra Lineal) y *Software Científico* (para resolver situaciones prácticas de *Transformaciones Lineales*). La propuesta de esta experiencia ofrece la alternativa para hacer Álgebra Lineal en el aula en la que se integran: alumno, docente y tecnología educativa.

## UBICACIÓN DEL TEMA A DESARROLLAR EN LA EXPERIENCIA

La materia Álgebra Lineal es cursada en el 1° Cuatrimestre, por los alumnos del primer año de las carreras Licenciatura en Geofísica y Licenciatura en Astronomía. Es de duración cuatrimestral con una carga horaria de 8 horas semanales teórico-prácticas. El programa de la asignatura incluye las siguientes unidades temáticas:

Matrices y Determinantes. Sistemas de Ecuaciones Lineales. Espacios Vectoriales Reales. Transformaciones Lineales. Eigenvectores y Eigenvalores.

Dentro de este contexto y gracias a la posibilidad de utilizar el gabinete de computación de la Facultad se decide la ejecución de prácticas con apoyo de software científico: Maple y la selección de la unidad didáctica de transformaciones lineales para desarrollarla empleando material hipermediado presentado desde una página web, preparada por la programadora Natalia Pizarro.

La unidad mediada de *Transformaciones Lineales*, es un entorno de aprendizaje en el que se usa tecnología hipermedial y está compuesta por los siguientes temas:

Definiciones y Ejemplos de Transformaciones Lineales. Núcleo y Contradominio. Espacio Vectorial de las Matrices. Cambio de Base.

Contiene además:

- Una Introducción de Álgebra Lineal, donde se da a conocer los referentes necesarios para entrar por completo a los contenidos a desarrollar.
- Una Introducción a Transformaciones Lineales, donde se dan conceptos previos que teniéndolos en cuenta se puede lograr un entendimiento más productivo y satisfactorio.
- Por último también, en cuanto a los contenidos, cuenta con una práctica general, que pretende ser la evaluación de todo lo aprendido.
- Una barra de navegación, que permite la navegación de los contenidos sin manipular el orden en que deben ser vistos.

Este material educativo integra los conceptos de hipertexto y multimedia (texto, imagen, etc.) y da lugar a la construcción de documentos que permite al lector salir de la habitual lectura lineal, para arribar a una lectura de hiper-documentos, los cuales le permiten obtener la información que realmente necesita en el momento adecuado: a través de enlaces establecidos por el autor, entre los diferentes elementos de información que conforman el documento.

## **MEDIOS PROPUESTOS Y OBJETIVOS PLANTEADOS**

El equipo de cátedra implicado en este proceso viene trabajando desde hace varios años con tecnología informática: desde hace 2 años incorporó el uso de “material hipermediado” para el diseño de unidades didácticas, como la que es objeto de esta experiencia: transformaciones lineales, con el que se pretende lograr que el alumno:

- ✓ Retome el perdido hábito de la lectura .
- ✓ Que su proceso de aprendizaje sea fruto de una nueva interacción entre los contenidos que debe aprender y la tecnología informática en la que está disponible este material, permitiéndole así una educación acorde a los requerimientos de la sociedad actual.
- ✓ Pueda navegar fácilmente la página preparada a fin de que pueda analizar los contenidos de forma no tradicional. Para esto cuenta con la dirección electrónica de los docentes de la cátedra para realizar consultas.

Además, desde hace diez años , la cátedra trabaja con guías prácticas que implementan el uso de software científico, en clases de gabinete de computación. Estas guías se preparan teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

- ✓ Familiarizar al alumno con una nueva herramienta de trabajo, útil y motivadora en el estudio de Álgebra Lineal y adaptable a otras asignaturas de su plan de estudio.
- ✓ Generar un espacio didáctico que permite la superación de la tradicional dicotomía entre teoría y práctica, logrando así una visión integrada de los contenidos.
- ✓ Optimizar los resultados obtenidos con el uso de software, lo cual requiere una adecuada interpretación de resultados, basada en el dominio de los contenidos teóricos de la asignatura.

## **METODOLOGÍA EMPLEADA:**

La experiencia se desarrolla en dos etapas de trabajo, donde en cada una de ellas se presentan guías a desarrollar. Brevemente se describen los aspectos más sobresalientes de cada una de ellas.

## **PRIMERA FASE DEL TRABAJO**

Se desarrolla en cinco sesiones de trabajo en el gabinete de computación. En cada sesión se trabaja en grupos de dos o tres alumnos por PC, con guías teórico-prácticas, para el desarrollo de los contenidos y actividades que corresponden a la unidad de Transformaciones Lineales, residente en el sitio web: [www.portalzonda.com.ar/Matematica](http://www.portalzonda.com.ar/Matematica)

- ✓ Los apartados teóricos están preparados para lograr en el alumno la asimilación, fijación y apropiación de los principales conceptos involucrados en esta unidad.
- ✓ Los ítems meramente prácticos pretenden que el alumno logre la aplicabilidad (con lápiz y papel), transferencia y conexión horizontal y vertical de estos contenidos con los ya trabajados.

Al finalizar cada sesión de laboratorio, se realiza una puesta al día con los cuestionarios completados, integrando el material analizado, unificando la heterogeneidad de avances de cada grupo de trabajo, para que el inicio de cada próximo encuentro sea más eficaz.

### **Resultados Observados**

Abordar los contenidos de la unidad Transformaciones Lineales utilizando una página web, permite desarrollar una forma distinta de aprender Álgebra Lineal.

Los alumnos opinaron que, con la aplicación de este recurso, se les permite avanzar en la apropiación de los contenidos a su propio ritmo de aprendizaje.

En relación a la presentación de la página web, opinaron que les permite navegarla en forma sencilla, y pueden avanzar en la complejidad de los contenidos. Además que la presencia de ventanas emergentes, permite recordar conceptos ya vistos; y los gráficos incluidos en la misma favorecen a integrar Álgebra Lineal con Geometría Analítica, pues presenta imágenes de sustitución, que muestran el efecto geométrico de la Transformación Lineal y su fórmula algebraica.

## SEGUNDA FASE DE TRABAJO

Para esta segunda etapa, que se desarrolla luego de haber analizado los conceptos de la unidad de Transformaciones Lineales, se propone una guía de trabajo eminentemente práctica, la que para ser resuelta necesitan aplicar los “comandos” del software a fin de obtener resultados. También incluye situaciones que requieren un planteo algebraico previo, para luego ejecutar la aplicación de comandos del programa y dar la solución algebraica, y/o gráfica que permite la visualización de resultados.

### Resultados Observados

Por medio de esta propuesta de trabajo se puede advertir la incorporación del alumno en pequeñas actividades de investigación, como también se favorece el intercambio de opiniones, lo cual resulta muy bien aceptado por ellos a pesar de las diferencias de ritmo manifestadas en la producción de los mismos.

### Esquema de la Secuencia Seguida en las Actividades Desarrolladas

En forma sintética se diagraman las acciones realizadas, Figura 1, para vincular recursos informáticos con los contenidos de la asignatura.

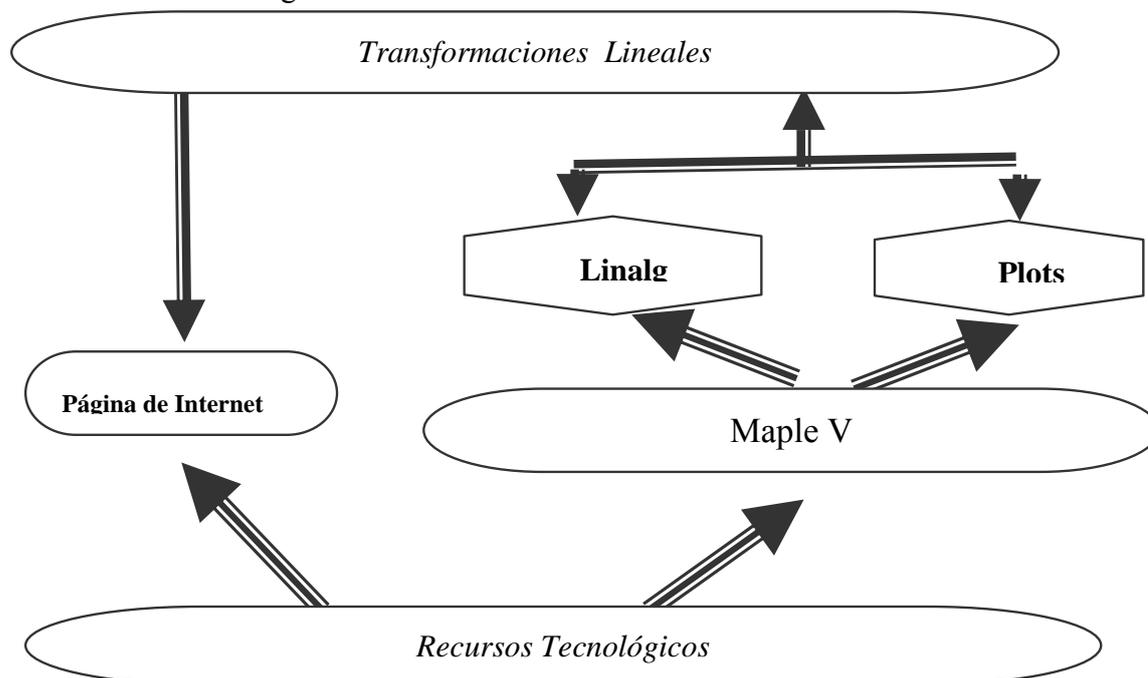


Figura 1: Esquema de acciones realizadas para abordar contenidos teórico – prácticos de Transformaciones Lineales.

Se esquematizan los vínculos establecidos, Figura 2, entre el equipo de cátedra y la programadora para lograr la preparación de la página web.

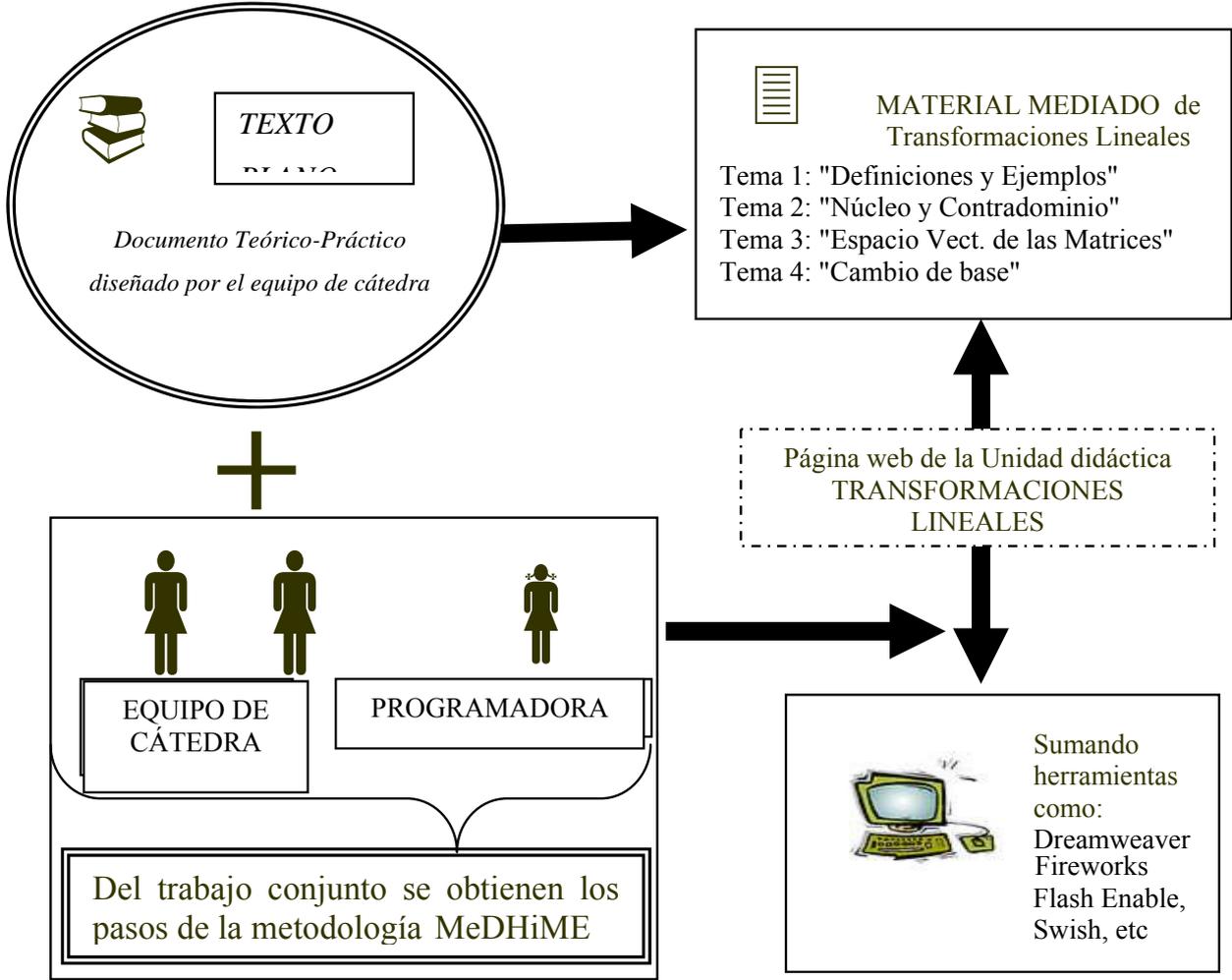


Figura 2: Representación gráfica de las acciones realizadas para desarrollar el sitio web de Transformaciones Lineales.

## PRESENTACIÓN DE GUÍAS DE TRABAJO UTILIZADAS EN AMBAS ETAPAS

### \* Breve presentación de material de trabajo correspondiente a la primera etapa:

ALGUNAS PREGUNTAS DE LA GUÍA TEÓRICO-PRÁCTICA N° 3, PARA EL TRABAJO CON EL SITIO WEB

1. ¿De quién depende la representación matricial de una transformación lineal?
2. Fijadas un par de bases para los espacios vectoriales  $V$  y  $W$ , ¿cuántas representaciones matriciales existen para una transformación lineal  $T: V \rightarrow W$ ?
3. a) Copie la expresión final de representación matricial de la transformación  $T: V \rightarrow W$  respecto de las bases  $B_1$  y  $B_2$  de  $V$  y  $W$  respectivamente  
b) Explique que representa la primera columna de la matriz  $A_T$  referida a las bases  $B_1$  y  $B_2$
4. ¿Cuántas representaciones matriciales puede obtener para una transformación lineal?
5. ¿A qué se llama “matriz estándar” de una transformación lineal  $T: V \rightarrow W$ ?
6. Resuelva el ejercicio de aplicación propuesto

### \* Breve presentación de material de trabajo correspondiente a la segunda etapa:

COMANDOS MÁS FRECUENTES DE MAPLE V, QUE SE USARÁN PARA RESOLVER LA GUÍA DE LABORATORIO DE COMPUTACIÓN

<code>with(linalg):</code>	<code>C:=array([[1,2,3],[3,-1,1/2]]);</code>
<code>A:=array(1..n,1..m);</code>	<code>evalm(e&amp;*d);</code>
<code>gausselim(a);</code>	<code>gaussjord(a);</code>
<code>solve({eq1,eq2,...});</code>	<code>U:=vector([1,-2,6,0,7]);</code>
<code>kernel(a);</code> ó <code>nullspace(a);</code>	<code>colspace(a);</code>
<code>rowSpace(a);</code>	<code>GramSchmidt({v1,v2,...,vn});</code>
<code>normalize(u);</code>	<code>with(plots):</code>
<code>plot3d(func,x=a..b,y=c..d,z=e..f);</code>	<code>display({f,g});</code>
<code>PLOT3D(POINTS([x1,y1,z1],[x2,y2,z2],...[xn,yn,zn],SYMBOL(DIAMOND)));</code>	

## ALGUNOS EJERCICIOS DE LA PRÁCTICA DE LABORATORIO, CON USO DE MAPLE V

Ejercicio 1:

Sea  $T: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3: T((x, y, z, t)) = (x - y + z + t, x + 2z - t, x + 3y + 3z - 3t)$

- a) Encuentre la matriz estandar de la transformación lineal.
- b) En base al apartado a), encuentre la fórmula de la transformación lineal.
- c) De, en caso de ser posible, una base del Núcleo de  $T$ .
- d) Dar la forma del subespacio  $\text{Nuc } T$ .
- e) De, en caso de ser posible, una base del Rango de  $T$ .
- f) Verifique el teorema de la dimensión de una transformación lineal.

Ejercicio 2:

Dada la transformación lineal  $T(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ , donde  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 13 & -8 \end{bmatrix}$

- a) Resolver los apartados b) a f) del ejercicio anterior.
- b) Clasifique la transformación lineal.

Ejercicio 3:

Dadas las siguientes transformaciones lineales:

a)  $L: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 / L((x, y, z)) = (2x, 2y, 2z)$

b)  $T: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3 / T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$

Dar una base del Núcleo y de la Imagen de cada transformación lineal.

Ejercicio 4:

Aplique a la figura de vértices:  $A = (1, 5, 2)$ ,  $B = (1, 2, 2)$ ,  $C = (3, 4, 6)$ , la transformación lineal  $L$  (del ejercicio anterior).

Calcule el área de la figura de vértices  $ABC$  y el área de la figura transformada.

(Sugerencia: área de un triángulo de lados  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  es  $\frac{1}{2} \left\| \vec{u} \times \vec{v} \right\|$ )

## EVALUACIÓN DE LAS ACTIVIDADES

Concluidas las actividades involucradas en esta experiencia de aprendizaje, se evaluaron las mismas, realizando encuestas a los alumnos. En las mismas se analizaron aspectos generales de la experiencia en la cual ellos fueron los principales protagonistas, y los ítems analizados fueron:

- Opinión sobre el estudio de contenidos con uso de página de Internet.
- Análisis de las guías teórico-prácticas y prácticas propuestas, en cuanto a su relación con los contenidos desarrollados.
- Dificultades en el aprendizaje del software MAPLE V .
- Reflexión sobre su trabajo durante las sesiones de gabinete.

Analizadas estadísticamente las encuestas, se obtuvo que:

- El 75% opina que es muy bueno estudiar en el sitio web, cada uno puede ir a su ritmo.
- El 87% considera que la presentación simultánea de fórmulas con su gráfico es muy práctica en la página de Internet y el 67 % de los alumnos opina que el uso de páginas vinculadas le ayuda más, que las pequeñas ventanas emergentes a recordar definiciones.
- El 100% de los alumnos estuvo de acuerdo en que la experiencia está estrechamente relacionada con los contenidos teórico - prácticos , vistos previamente.
- El 86% de los alumnos opina que el aprendizaje y aplicación , de los comandos de Maple V, le resultó accesible .

La disposición del equipo de cátedra responsable de esta experiencia permitió el trabajo constructivo de los alumnos, paliando situaciones de ansiedad que pudieran haberse presentado .

Estos resultados estuvieron muy cercanos a las respuestas esperadas por la cátedra.

## CONCLUSIONES GENERALES

Nuestra experiencia docente indica que la utilización de este tipo de prácticas en el aula muestra efectos positivos. Los motivos principales de esta opinión están basados en la observación de los siguientes resultados:

- \* La PC ofrece resultados e imágenes instantáneas que facilitan la comprensión y mantienen la atención del estudiante en la actividad que están desarrollando, que además resulta gratificante cuando la adecuada manipulación de los conceptos y procedimientos le conduce a la solución correcta.
- \* Estas actividades incrementan el aspecto lúdico en el aprendizaje del Álgebra Lineal, que conduce a un aumento de motivación y a una mejora en la calidad del proceso educativo.
- \* Se demuestra que la metodología de uso de páginas de Internet es apta para materias de tipo científicas, como es matemática.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Anton , H. (1995). *Introducción al Álgebra Lineal*. México: Editorial Limusa.
- Beauregard, R.; Fraleigh, J. (1989). *Álgebra Lineal*. Buenos Aires: Addison Wesley Iberoamericana.
- Carrillo de Albornoz, A.; Llamas Centeno, I. (1995). *Maple V. Aplicaciones matemáticas para PC*. Buenos Aires: Addison Wesley Iberoamericana & Rama.
- Ciancio M. (2004). *Apuntes de Cátedra: Álgebra Lineal: Unidad 4: Transformaciones Lineales*. 2004. San Juan: Universidad Nacional de San Juan.
- Florey, F. (1980). *Fundamentos del Álgebra Lineal y Aplicaciones*. México: Prentice Hall.
- García, A.; Martínez ,A.; Rincón, F. (1995). *Cálculo científico con Maple*. Madrid: Rama.
- Grossman, S. (1996). *Álgebra Lineal*. México: Mc Graw Hill.
- Sirvente, F y otros. (2003). *MeDHiME, un puente de comunicación entre programadores y docentes para producir materiales educativos navegables*. Apuntes de cátedra. San Juan: Universidad Nacional de San Juan.