LE FRAZIONI
UN PERCORSO PER LA SECONDA CLASSE

GRUPPO DI RICERCA E DI SPERIMENTAZIONE DIDATTICA DI MATEMATICA DEL CIDI DI FIRENZE:

(*BASOSI DANIELA, BISOGNO ILARIA, CIABINI LUCIA, GIANSANTI STEFANIA, PAPINI PAOLA, PISTOLESI ALICE, TRIPPI ARIANNA*)

INTRODUZIONE

Il tema delle frazioni rappresenta uno dei temi più complessi e difficili da affrontare nella scuola di base e, insieme a quello collegato dei numeri decimali, costituisce uno degli insuccessi scolastici più comuni sia in Italia che nel resto del mondo.

INTRODUZIONE

Nella scuola secondaria oltre a riprendere il concetto di frazione come operatore, si devono affrontare i seguenti concetti:

- Frazione come numero
- Frazione come punto sulla retta orientata
- Frazione come rapporto
- Ruolo della frazione nella proporzionalità
- Ruolo della frazione nella percentuale
- Ruolo della frazione nella probabilità
- Frazione nelle unità di misura
- Uso nel linguaggio quotidiano (orario, pendenza di una strada ecc.)

COLLOCAZIONE DEL PERCORSO

Il percorso potrebbe essere svolto in parte alla fine della classe prima e concluso nei primi mesi della classe seconda; in alternativa potrebbe essere svolto completamente nella classe seconda e richiederebbe l'intero primo quadrimestre.

Al termine di questa sperimentazione suggeriamo di effettuare questo percorso interamente nel secondo anno perché più proficuo in termini di continuità e di coinvolgimento degli alunni.

- Tra i prerequisiti è fondamentale il concetto di quoziente.

Nel percorso si affrontano i primi tre punti:

- Frazione come numero
- Frazione come punto sulla retta orientata
- Frazione come rapporto

Indispensabili per sviluppare i successivi punti nell'ambito del nucleo tematico i NUMERI.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

- Usare le frazioni come operatori e come numeri.
- Rappresentare i razionali sulla retta.
- Utilizzare frazioni equivalenti e numeri decimali per denotare uno stesso numero razionale.
- Eseguire addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, ordinamenti e confronti tra frazioni e decimali.

OBIETTIVI ESSENZIALI DI APPRENDIMENTO

Traguardi per lo sviluppo delle competenze*:

- L'alunno si muove con sicurezza nel calcolo anche con i numeri razionali, ne padroneggia le diverse rappresentazioni e stima la grandezza di un numero e il risultato di operazioni.
- Produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite.
- Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta.
- Rafforza un atteggiamento positivo rispetto alla matematica attraverso esperienze significative e capisce come gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà.

Obiettivi di apprendimento*:

- Usare le frazioni come operatori e come numeri
- Eseguire ordinamenti e confronti tra numeri razionali
- Rappresentare i numeri razionali sulla retta.
- Utilizzare frazioni equivalenti e numeri decimali per denotare uno stesso numero razionale in diversi modi, essendo consapevoli di vantaggi e svantaggi delle diverse rappresentazioni.
- Comprendere il significato di percentuale e saperla rappresentare come frazione.
- Eseguire addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni tra frazioni.
- Eseguire semplici espressioni di calcolo con le frazioni.

* Tratto dalle Indicazioni Nazionali 2012

APPROCCIO METODOLOGICO

Didattica laboratoriale in cinque fasi:

Punti di partenza sono l'osservazione e la riflessione dell'alunno che prova in prima persona a risolvere situazioni problematiche e che risponde individualmente a domande poste dall'insegnante;

successivamente gli alunni partecipano ad una discussione collettiva da cui si genera un secondo livello di riflessione;

da esso scaturiscono definizioni operative di regole e di proprietà condivise da tutti i ragazzi.

Le conclusioni vengono trascritte da ogni alunno sul proprio quaderno.

Le attività vengono svolte in classe, individualmente o a gruppi.

I **materiali** usati sono carta, pennarelli, carta lucida, das e cartoncino bristol per il gioco.

Strumenti necessari: lavagna, lim, forbici, righe ecc.

MATERIALI, STRUMENTI E AMBIENTI

Le attività vengono svolte in classe, individualmente o a gruppi.

I **materiali** usati sono carta, pennarelli, carta lucida, das e cartoncino bristol per il gioco.

Strumenti necessari: lavagna, lim, forbici, righe ecc.

PREMESSA

Quanto verrà qui documentato è solo una parte dell'intero percorso.

Il tempo dedicato a questo argomento è stato di tre mesi (tutto il primo quadrimestre) perché il tema delle frazioni rappresenta uno dei temi più complessi e difficili da affrontare nella scuola di base e necessita di tempi molto distesi per affrontare al meglio i vari aspetti dei numeri razionali.

Affinché la documentazione risulti proficua, verranno esposti i seguenti concetti: frazioni come operatori e come numeri, ordinamenti e confronti tra numeri razionali, rappresentazione sulla retta, frazioni equivalenti, addizioni e sottrazioni tra frazioni. Gli altri aspetti elencati negli obiettivi essenziali di apprendimento (moltiplicazione e divisione) si trovano in un secondo file dal titolo "Tra le pieghe della frazione".

DESCRIZIONE DEL PERCORSO

LE FASI

Il percorso può essere suddiviso in cinque fasi:

1. Frazione come operatore e come numero
2. Frazioni proprie, improprie ed apparenti
3. Frazioni equivalenti
4. Confronto tra frazioni
5. Addizione e sottrazione tra frazioni

FASE 1

FRAZIONE COME OPERATORE E COME NUMERO

Nel linguaggio comune, la parola "frazione" indica generalmente una parte di un tutto, invece nel linguaggio matematico il termine "frazione" è applicabile solo alle diverse parti di una grandezza ottenute dividendo quella grandezza in parti uguali.

C'è dunque una differenza tra il significato comune e quello matematico del termine "frazione".

L'aggettivo "uguali" costituisce un'ulteriore complicazione cognitiva nella definizione di frazione, come relazione parte – tutto, a volte continuo a volte discreto: dividere una o più unità in parti uguali è la richiesta preliminare a qualsiasi trattazione sulle frazioni ma devono essere mostrati i diversi modi in cui ciò può essere fatto.

FRAZIONE COME OPERATORE

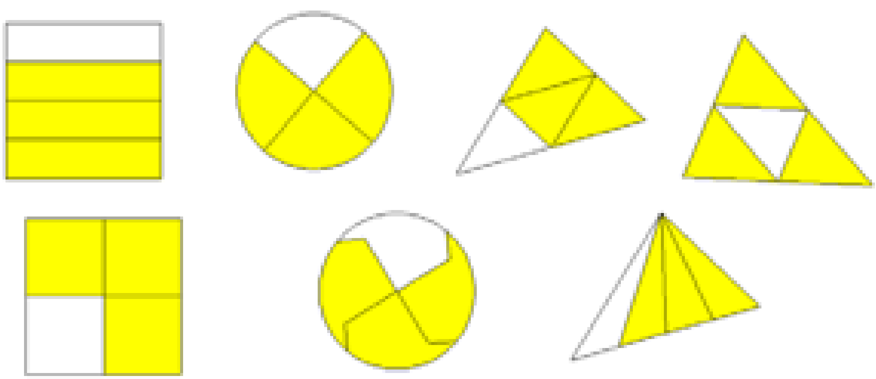
Come ci aspettavamo, il concetto di operatore che divide figure o insiemi discreti di oggetti è molto presente, dato che generalmente è l'unico aspetto di frazione che viene presentato alla scuola primaria.

Su cosa puntare nella scuola secondaria di I grado?

Crediamo su una varietà di rappresentazioni, possibilmente non banali.

$\frac{3}{4}$ rappresenta la classica torta che si divide in 4 fette di cui poi se ne prendono 3.

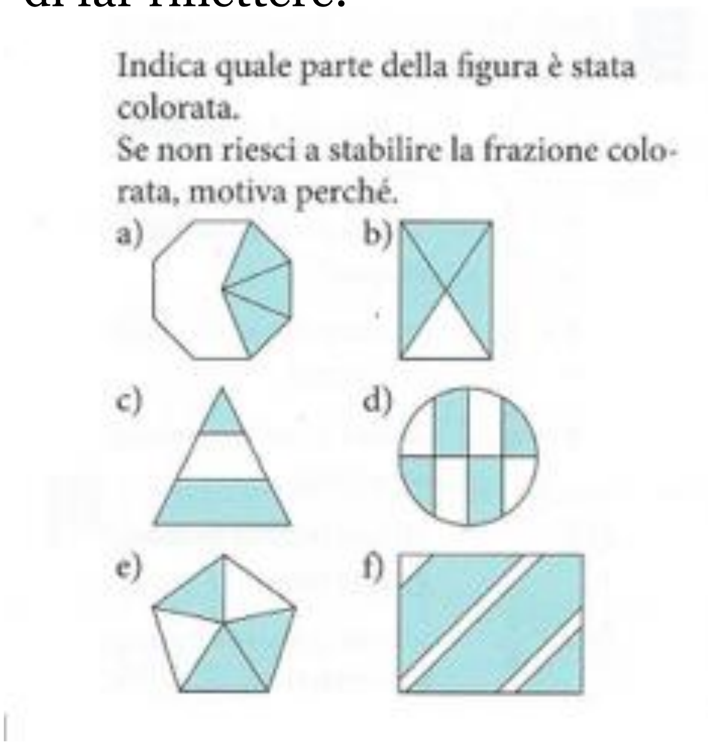
Ci sono molti esercizi sui libri di testo ma è importante mostrare agli alunni rappresentazioni schematiche il più possibile diverse per evitare che si fissino solo su una di queste.

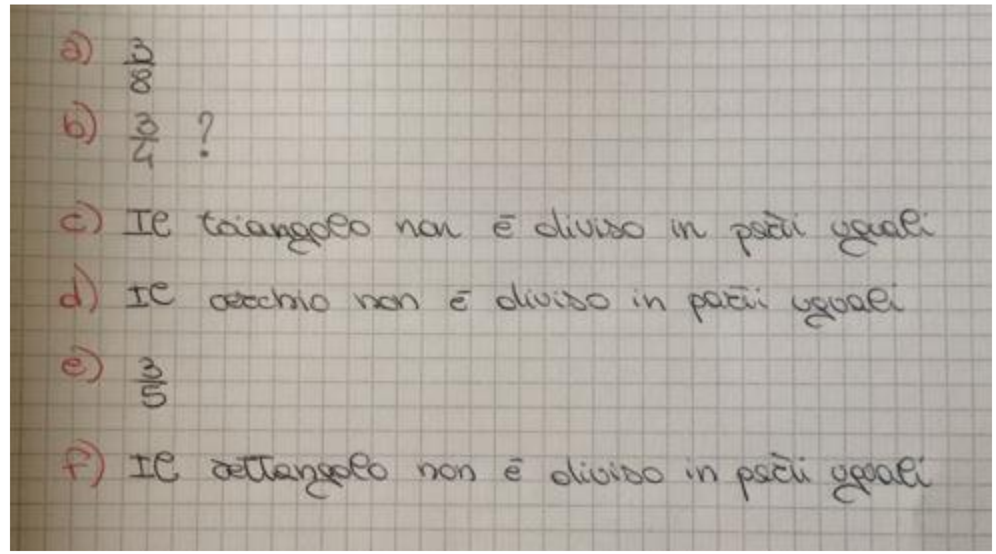


Quando è stata data agli alunni questa scheda hanno scritto immediatamente che la frazione corrispondente era sempre $\frac{3}{4}$. Ci ha un po' stupito che non avessero avuto dubbi, soprattutto sulle figure a destra. Abituati agli esercizi del libro di testo in cui bastava contare le parti colorate, non si sono soffermati ad osservare le varie forme rappresentate.

FRAZIONE COME OPERATORE

Visti i risultati del precedente esercizio, è stata data la seguente scheda con lo scopo di far riflettere:



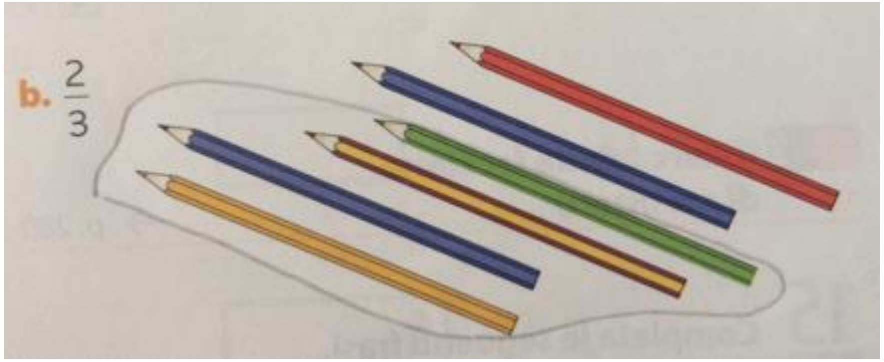


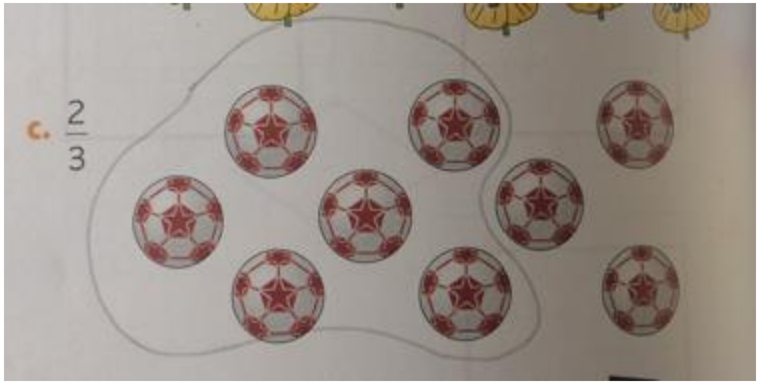
Da notare l'incertezza sulla figura b, avuta da molti. Chi ha risposto correttamente non è comunque stato in grado di motivare la sua scelta.

Per noi è stato importante trovare esercizi che stimolassero il momento della condivisione (in questo caso è stato utile anche il richiamo alla geometria dal momento che i nostri alunni chiamano matematica solo l'aritmetica mentre la geometria sembra una materia a sé stante).

FRAZIONE COME OPERATORE

Quando una frazione è intesa come operatore, l'informazione è completa solo se si indica su quale grandezza si opera. Abbiamo ritenuto importante dedicare del tempo al confronto di unità frazionarie che corrispondono a quantità diverse se le parti intere sono differenti.



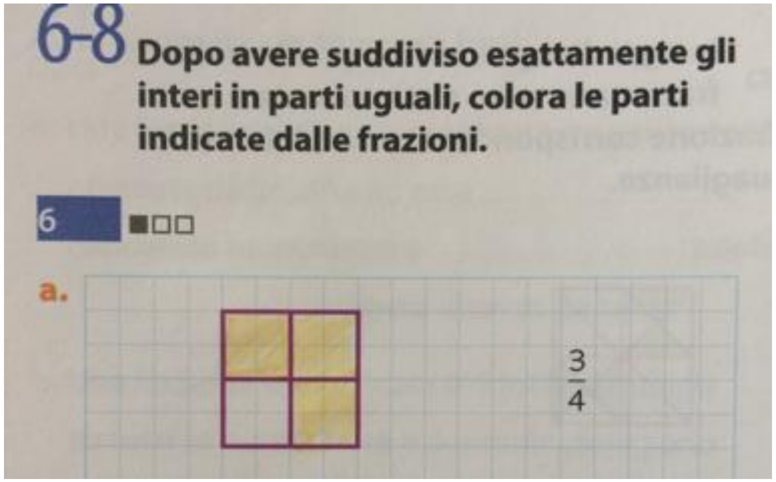


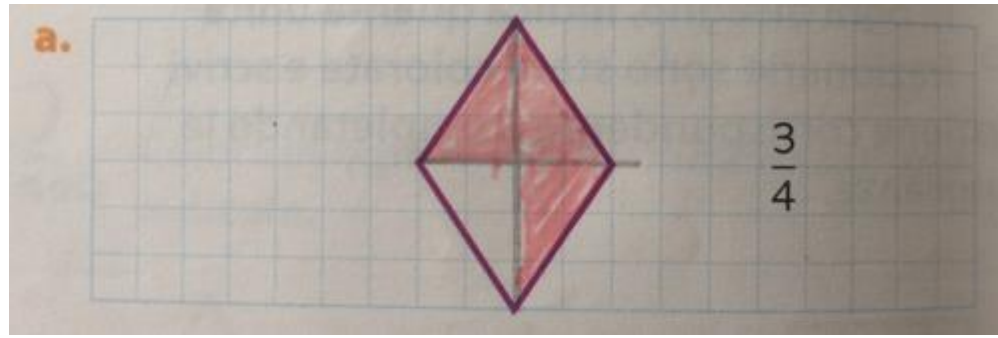
Le figure riportate appartengono a due esercizi differenti, la docente ha chiesto un confronto tra le due risposte date proprio in termini di numero di oggetti evidenziati.

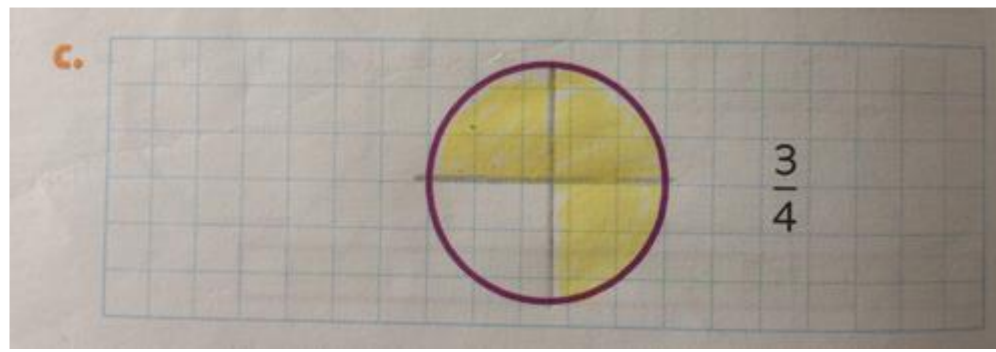
Abbiamo poi fatto ricercare nel libro altre figure che pur rappresentando la stessa frazione indicavano quantità diverse.
Abbiamo notato che questa attività ha appassionato gli studenti ritenendola quasi un gioco; noi abbiamo cercato di mantenere vivo questo entusiasmo, sperando che non si vanificasse alla fase delle operazioni, come storicamente avveniva.

FRAZIONE COME OPERATORE

Analogamente abbiamo pensato di confrontare esercizi in cui viene chiesto di colorare la parte corrispondente alla frazione data.







- Alla base di questi esercizi c’è il concetto dell’**equiestensione**: le unità frazionarie corrispondono allo stesso valore se hanno in comune la stessa area. Se nello stesso periodo viene affrontato il tema delle aree in geometria è possibile ed utile fare dei collegamenti. Nel nostro caso non erano ancora state mostrate le formule delle aree di tutte le figure piane, ma in molti casi abbiamo sfruttato il fatto che fosse possibile contare i quadretti.

FRAZIONE COME OPERATORE

Quando si applica una frazione, intesa come operatore, ad un numero significa operare prima con una divisione e poi con una moltiplicazione.

È importante far vedere agli alunni che si arriva allo stesso risultato invertendo l'ordine delle due operazioni.

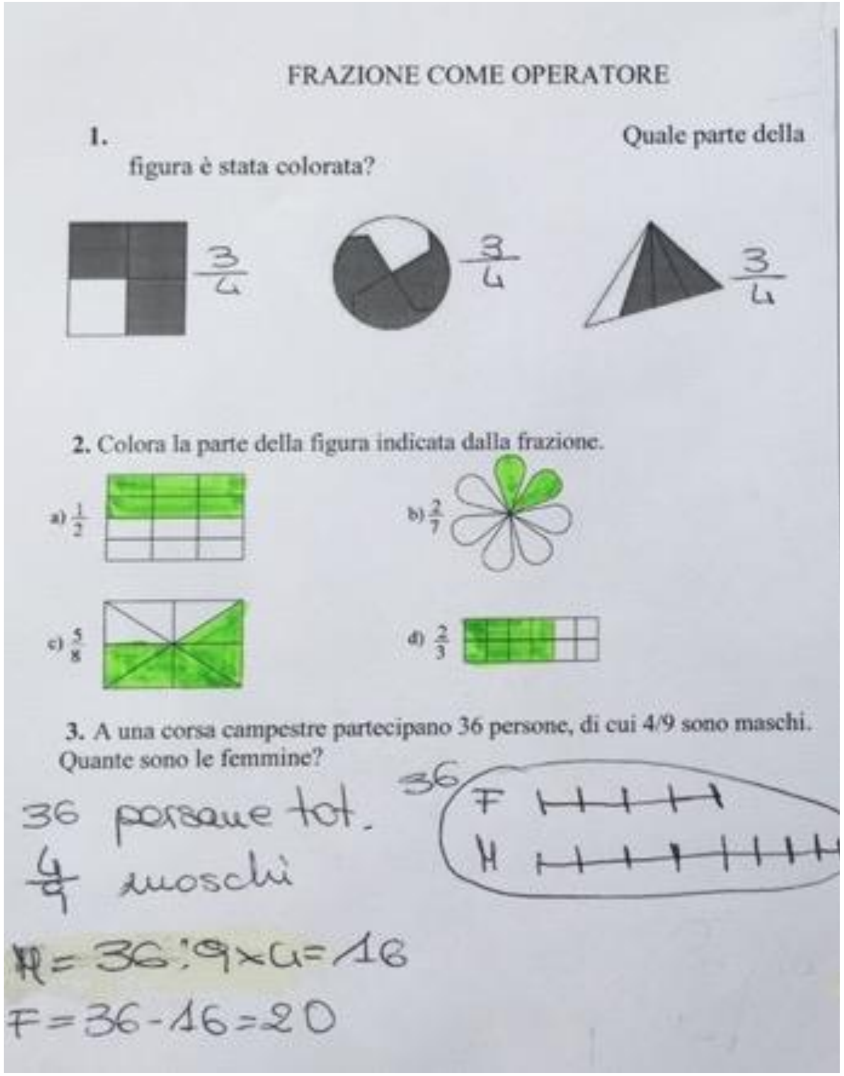
Se il risultato non cambia quale strada **conviene** utilizzare?

La maggior parte degli alunni risponde scegliendo la strada che porta ad avere i numeri più piccoli.

- *Diversi alunni, prima di far notare le differenze tra i due metodi, tendevano ad eseguire la moltiplicazione e successivamente la divisione solo perché preferivano rimandare l'operazione in cui si sentivano meno sicuri ("Almeno la prima parte del calcolo la faccio bene!"). Anche questa è stata un'ottima occasione di riflessione.*

FRAZIONE COME OPERATORE

Un esempio di esercitazione fatta in classe al termine della produzione condivisa.



FRAZIONE COME OPERATORE

1. Quale parte della figura è stata colorata?

$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$

2. Colora la parte della figura indicata dalla frazione.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{7}$

c) $\frac{5}{8}$ d) $\frac{2}{3}$

3. A una corsa campestre partecipano 36 persone, di cui 4/9 sono maschi. Quante sono le femmine?

36 persone tot.

$\frac{4}{9}$ maschi

36

F

M

$M = 36 : 9 \times 4 = 16$

$F = 36 - 16 = 20$

FRAZIONE COME NUMERO

«Che cosa significa il trattino della frazione?»

Tutti sanno che il trattino si chiama «riga di frazione», ma solo uno studente su 20 sa che esso rappresenta il simbolo di divisione. Questa conoscenza andrebbe introdotta già quando si parla di divisione per evitare uno stereotipo.

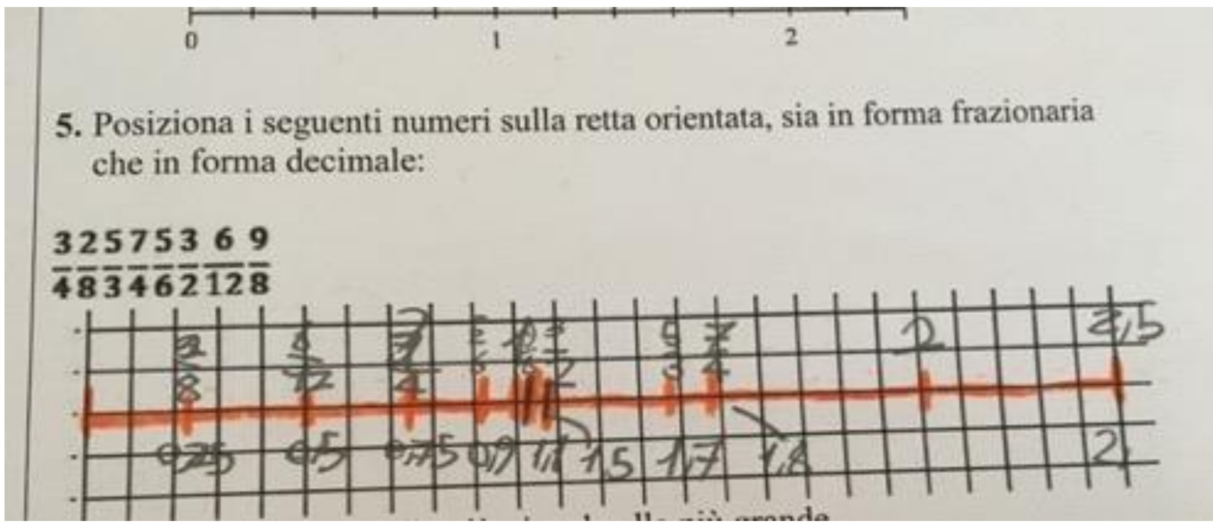
$$\frac{3}{4} = 3:4 = 0{,}75$$

Questo concetto sarà fondamentale per le lezioni successive, in cui alterneremo forma frazionaria e forma decimale.

FRAZIONE COME NUMERO

Nel trattare la frazione come numero è fondamentale iniziare a collocare ogni frazione sulla retta orientata, insieme agli interi (che altro non sono che frazioni particolari).

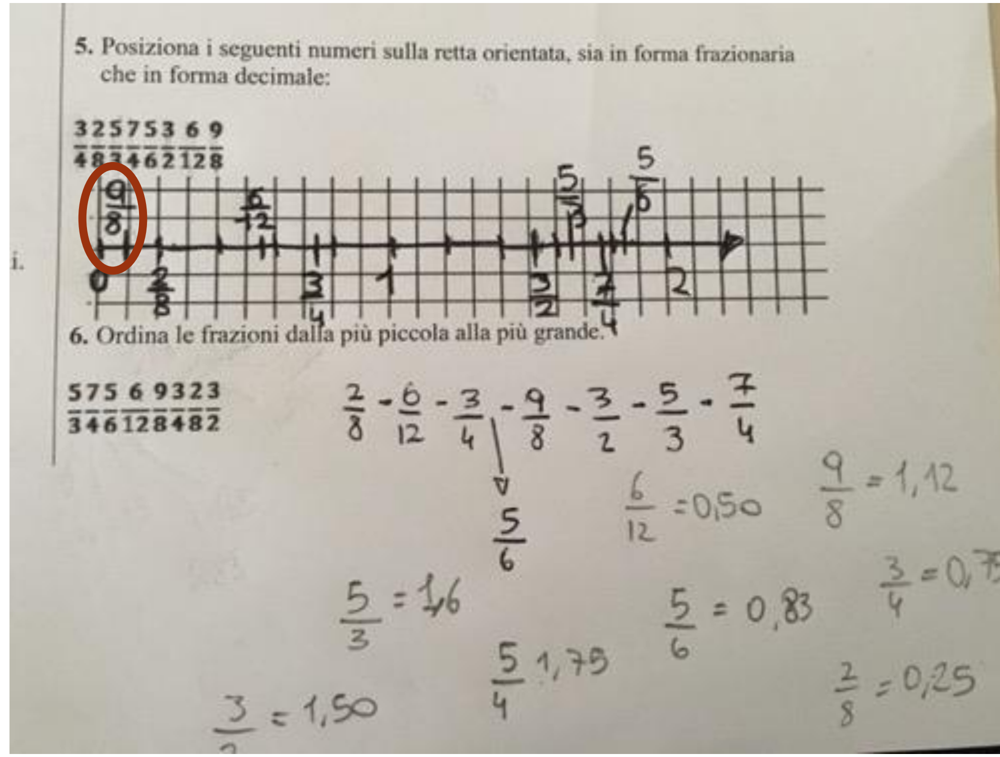
La parte del posizionamento risulta agli alunni più difficile da comprendere in quanto risulta piuttosto astratta, e ancora a questo punto sono molto ancorati al concetto di «operatore».



FRAZIONE COME NUMERO

La maggior parte degli alunni trova più agevole posizionare il numero nella forma decimale, ma in questa fase del percorso è normale che sia così.

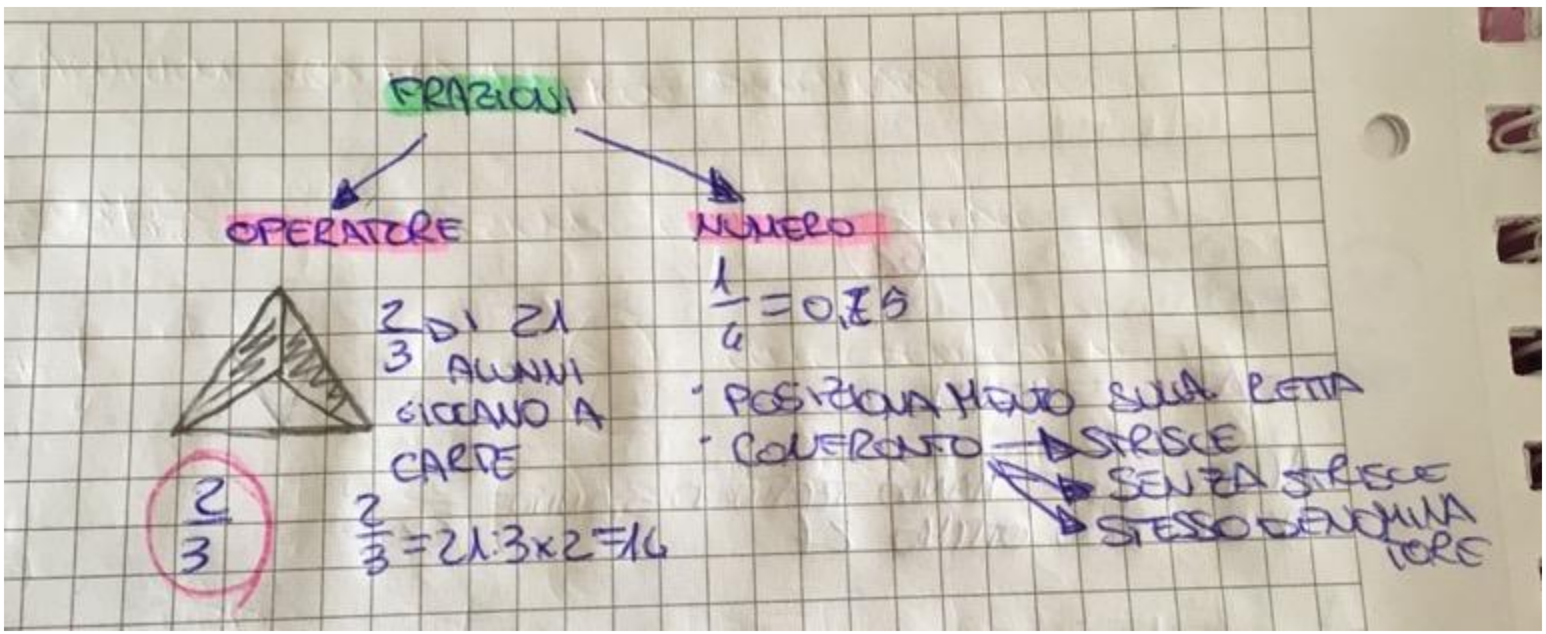
Nonostante questo, le frazioni corrispondenti a quantità maggiori di uno risultano le più difficili da collocare (notare in figura dove è stato collocato $\frac{9}{8}$, nonostante il passaggio alla forma decimale sia stato effettuato correttamente, anche se approssimato alla seconda cifra decimale).



- *Gli alunni non hanno gradito molto il passaggio alla forma decimale ma lo riteniamo fondamentale per far sedimentare il concetto di frazione come numero. È stata anche l'occasione per sottolineare l'importanza della stima facendo domande del tipo: secondo te il numero corrispondente a questa frazione sarà maggiore o minore di 1? Maggiore o minore di 0,5?*

FRAZIONE COME OPERATORE E COME NUMERO

SCHEMATIZZIAMO!!



ESERCIZI PER PROVARE
Prove Invalsi e non

In una delle coppie di numeri elencate sotto, il primo numero è minore di 1,25 e il secondo numero è maggiore di 1,25. In quale?

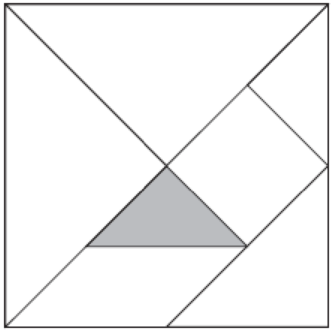
A. ☐ $\frac{8}{4}$ e $\frac{9}{4}$

B. ☐ $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$

C. ☐ $\frac{2}{2}$ e $\frac{3}{2}$

D. ☐ $\frac{9}{10}$ e $\frac{12}{10}$

D25. In figura è rappresentato il gioco del Tangram con i pezzi che lo compongono.



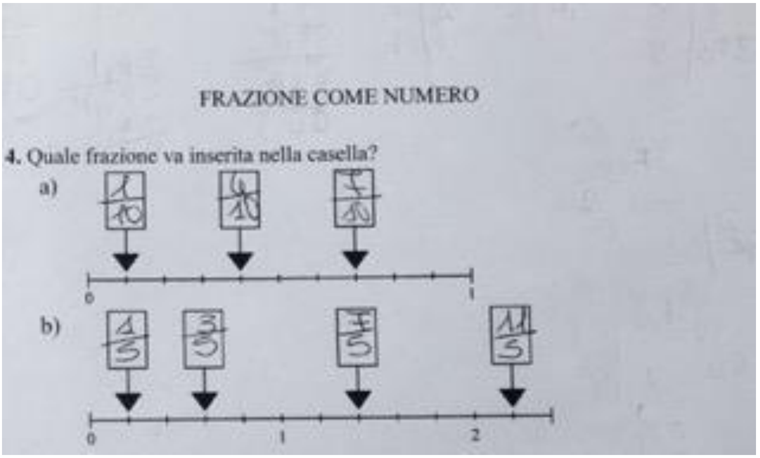
A quale frazione dell'area del Tangram corrisponde il pezzo colorato in grigio?

A. ☐ Un settimo

B. ☐ Un ottavo

C. ☐ Un quindicesimo

D. ☐ Un sedicesimo



FRAZIONE COME NUMERO

4. Quale frazione va inserita nella casella?

a) $\frac{1}{10}$ $\frac{4}{10}$ $\frac{7}{10}$

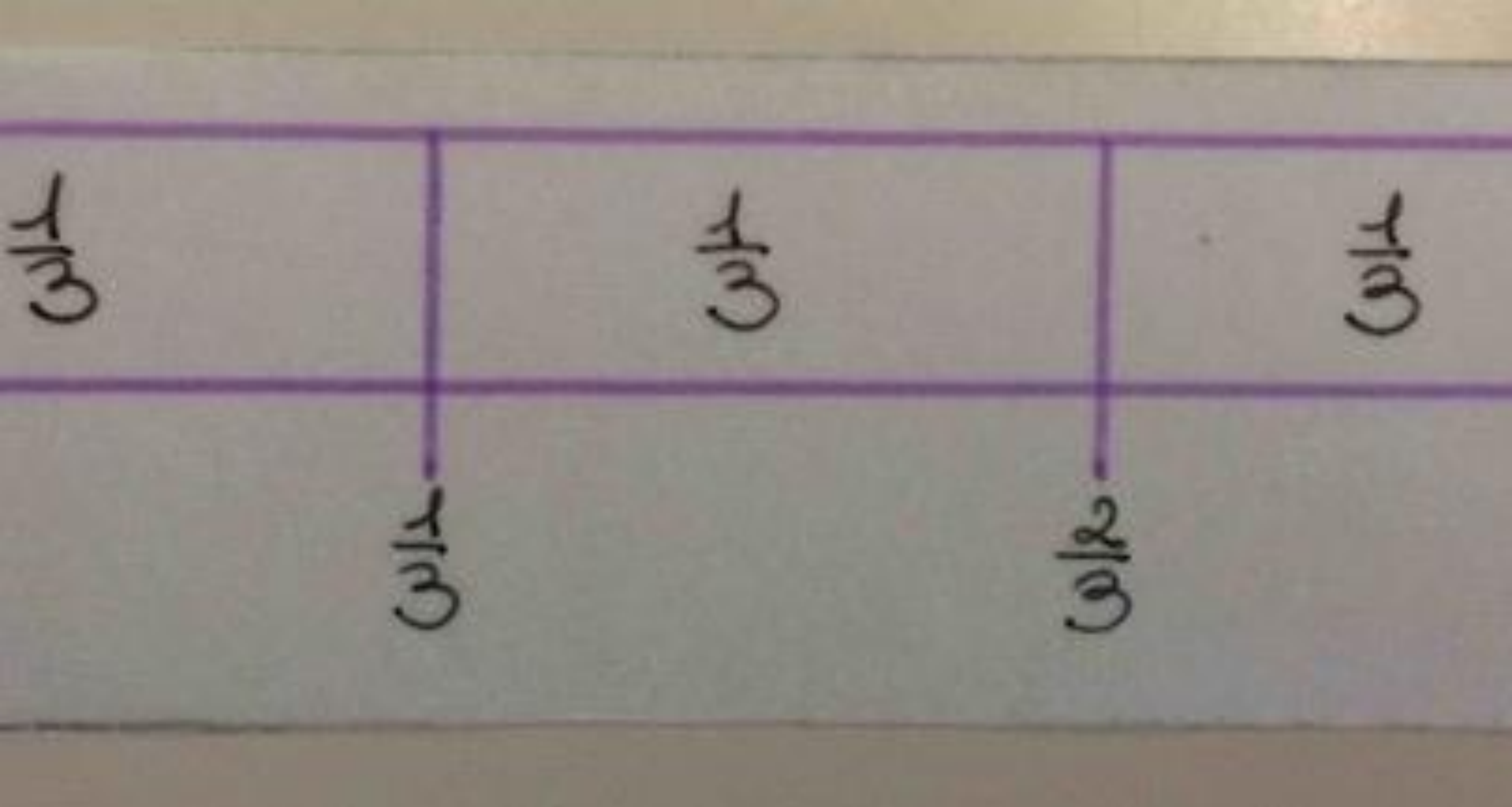
0 1

b) $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{7}{5}$ $\frac{11}{5}$

0 1 2

Quale numero puoi inserire nel quadratino per rendere vera la seguente disuguaglianza?

$$\frac{2}{5} < \frac{\square}{10} < \frac{3}{5}$$



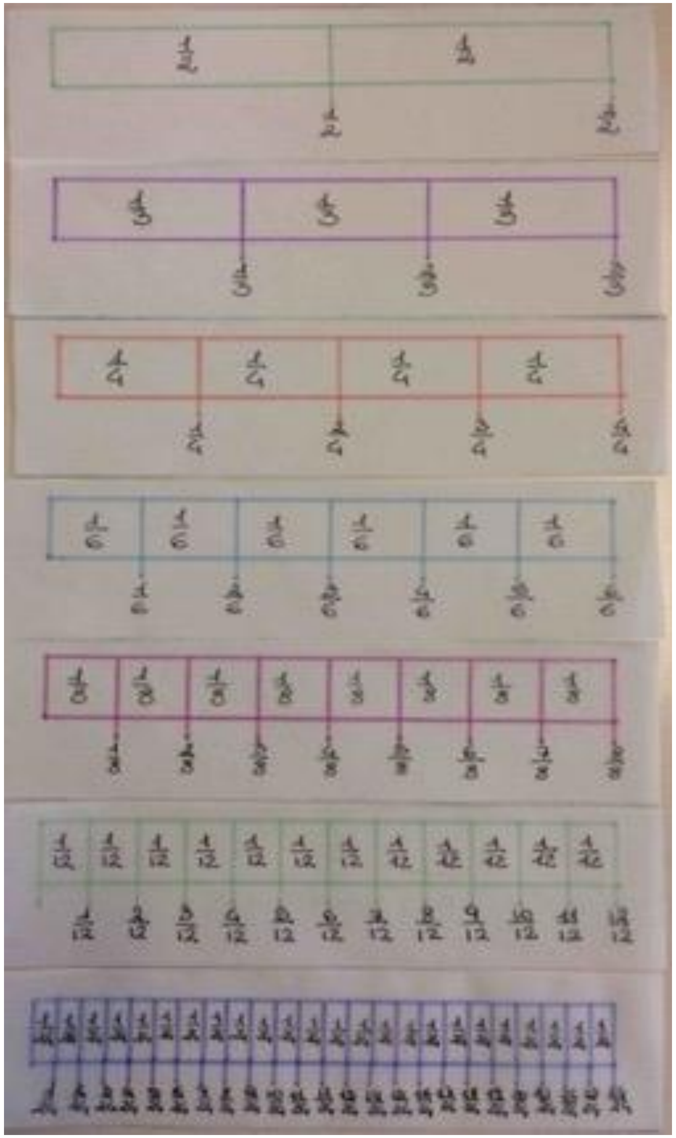
LO STRUMENTO DI LAVORO

PREPARIAMO LE STRISCE

Consegniamo ora agli studenti dei fogli di carta lucida con cui costruire delle strisce.

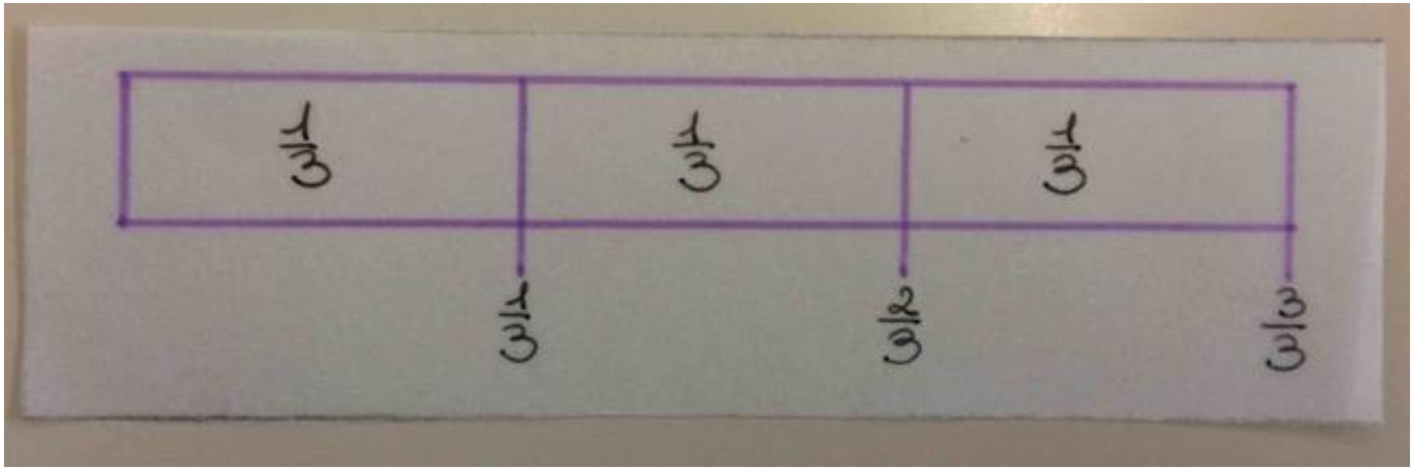
I ragazzi devono appoggiare il foglio su una pagina del proprio quaderno e disegnare 7 rettangoli congruenti, con l'altezza di 3 quadretti e la base di 24, ognuno di un colore diverso; successivamente dividono un rettangolo in due parti uguali, un altro in 3, uno in 4, uno in 6, uno in 8, uno in 12 e l'ultimo in 24 parti uguali.

Chiediamo di scrivere su ogni parte la frazione corrispondente. Questo procedimento va fatto ripetere per almeno tre volte in modo da avere tre strisce dello stesso tipo a disposizione.



PREPARIAMO LE STRISCE

Mostriamo una striscia per evidenziarne le due parti da cui è costituita: su ogni unità frazionaria viene scritto il valore corrispondente, mentre fuori dal rettangolo viene specificato il valore corrispondente a più unità frazionarie (la loro presenza sarà utile quando verranno affrontate le frazioni equivalenti e le operazioni).



PREPARIAMO LE STRISCE

Alcune riflessioni:

- Le strisce presentate sono il punto di arrivo di una sperimentazione che ha utilizzato tipologie diverse e quelle proposte risultano quelle più efficaci.
- Far preparare le strisce agli alunni comporta l'utilizzo di almeno un'ora di lezione, in alternativa l'insegnante potrebbe fornire delle fotocopie su carta lucida di strisce preparate dal docente o fotocopiate da libri. Noi suggeriamo di dedicarci del tempo e di farle costruire agli studenti principalmente per due motivi: difficilmente possiedono quaderni con i quadretti della stessa grandezza, quindi le dimensioni delle strisce, pur avendo la stessa unità (intesa come numero di quadretti), potrebbero variare, ed in una tipologia di percorso come questo, la carta quadrettata è uno strumento fondamentale anche se sottinteso. La seconda motivazione è quella di rafforzare il concetto di unità frazionaria, parte – tutto, e di far prendere confidenza agli studenti con quello che diventerà lo strumento di manipolazione.
- Il docente deve pensare bene alla grandezza dell'unità perché da essa dipenderà la selezione delle frazioni con cui fare le osservazioni (nel nostro caso, per esempio, non abbiamo potuto usare frazioni aventi al denominatore multipli del 5).

FASE 2

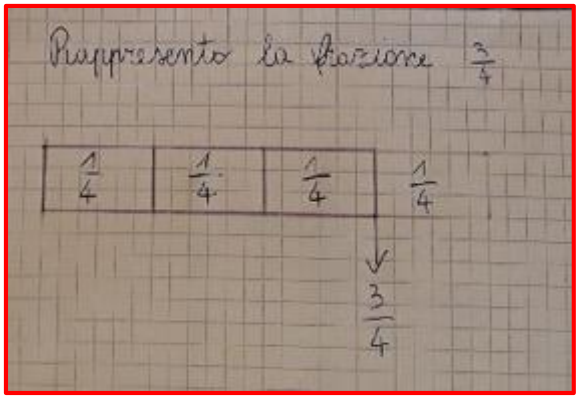
FRAZIONI PROPRIE, IMPROPRIE ED APPARENTI

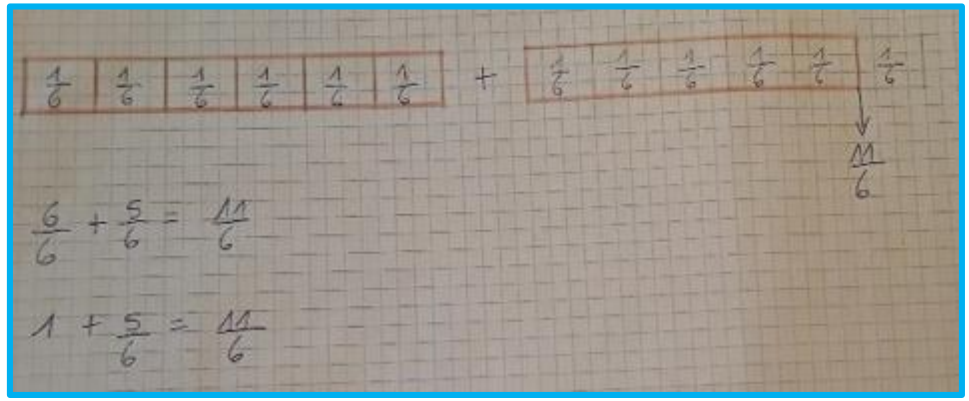
Il concetto di frazione propria, impropria ed apparente viene già affrontato alla scuola primaria, ma necessita di approfondimento e possibilmente di esperienze concrete.

Ci teniamo a sottolineare il fatto che riteniamo questa classificazione non indispensabile e che le attività mostrate sono state volte a far riflettere sulla possibilità che ad una frazione possa corrispondere un numero minore di 1, maggiore di 1 o un numero naturale.

FRAZIONI PROPRIE, IMPROPRIE ED APPARENTI

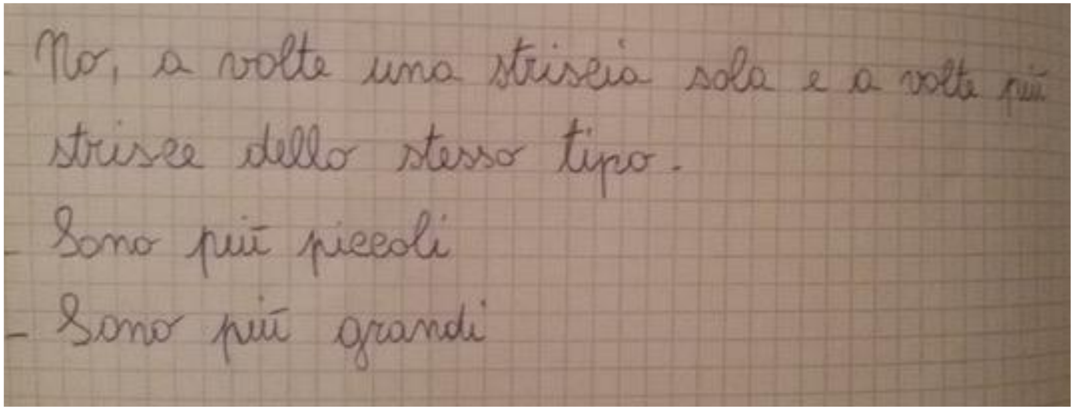
Sfruttando le strisce in possesso degli alunni, è stato chiesto loro di disegnare sul quaderno le seguenti frazioni : $\frac{3}{4}; \frac{5}{8}; \frac{7}{12}; \frac{3}{2}; \frac{11}{6}$





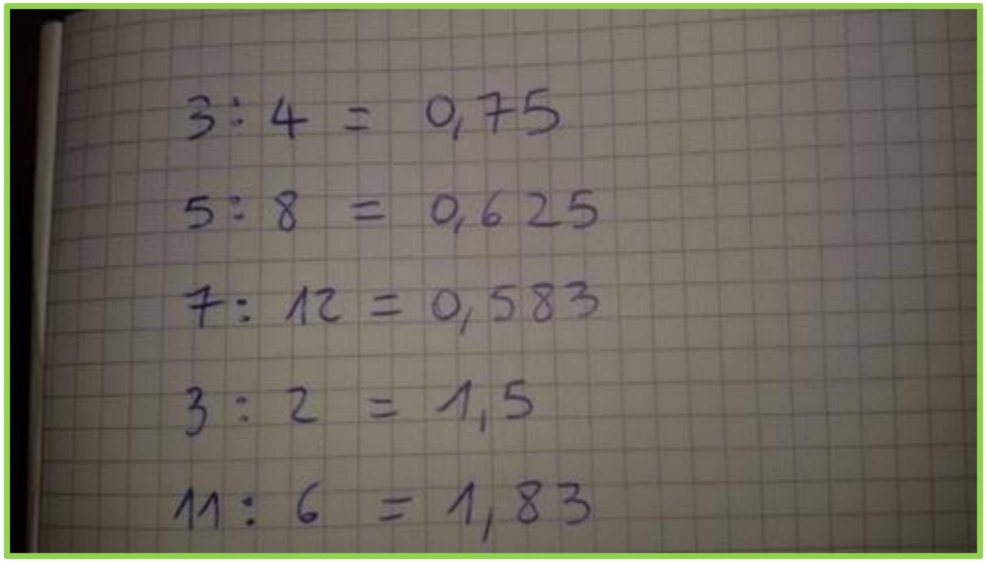
E DI RISPONDERE ALLE SEGUENTI DOMANDE:

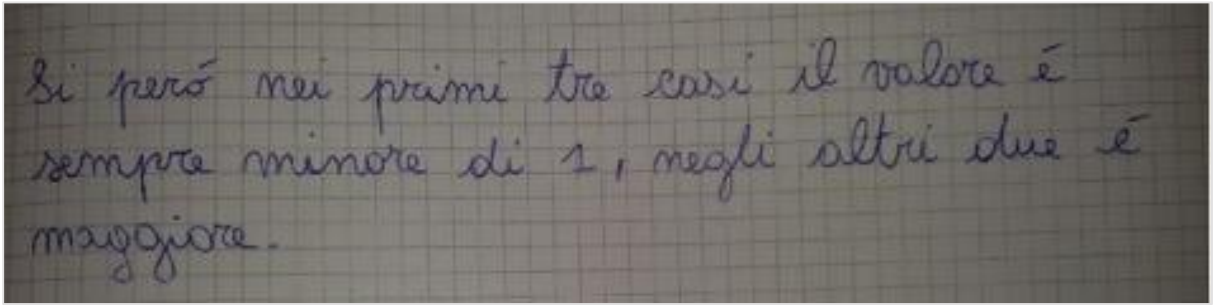
- Hai usato sempre lo stesso numero di strisce?
- Come sono i numeratori rispetto ai denominatori nei primi tre casi?
- E negli altri due?



FRAZIONI PROPRIE, IMPROPRIE ED APPARENTI

Se calcoli il valore della frazione ottieni sempre un numero decimale? Che differenze noti?

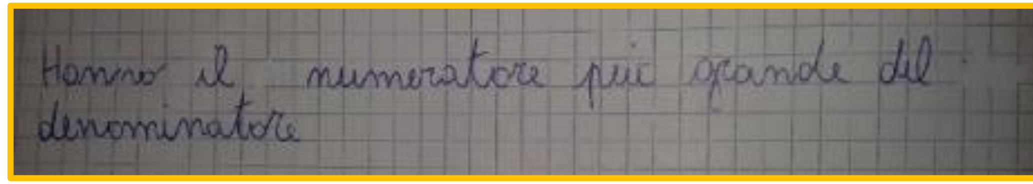




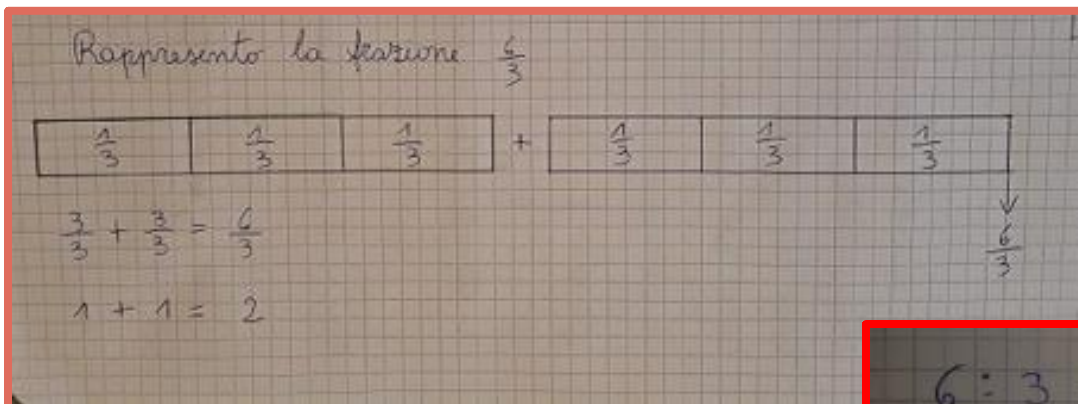
FRAZIONI PROPRIE, IMPROPRIE ED APPARENTI

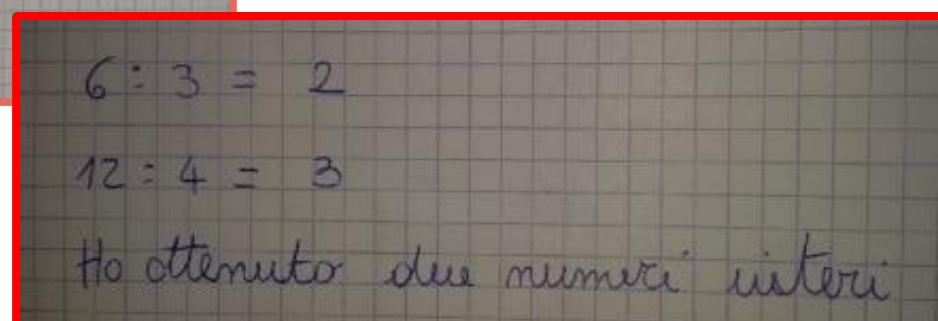
Osserva le seguenti frazioni: $\frac{6}{3}; \frac{12}{4}$

A quale dei casi precedenti le assoceresti?



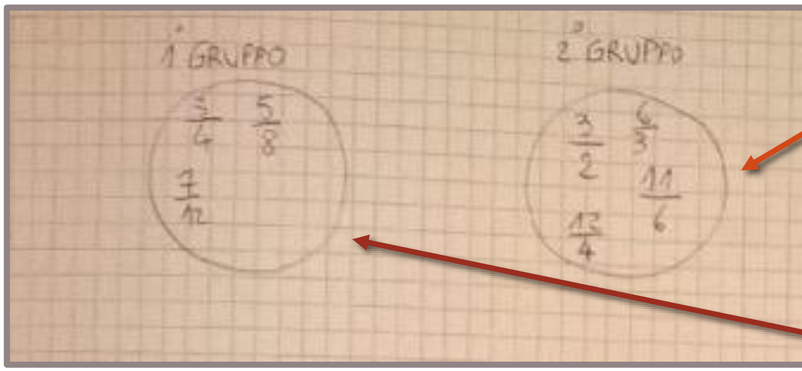
Rappresentale e calcolane il valore, che tipo di numero hai ottenuto?

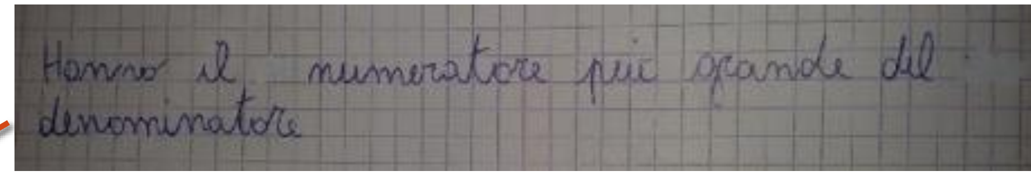


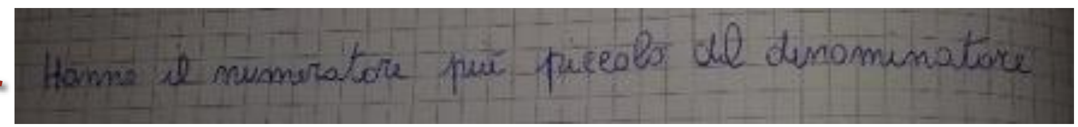


FRAZIONI PROPRIE, IMPROPRIE ED APPARENTI

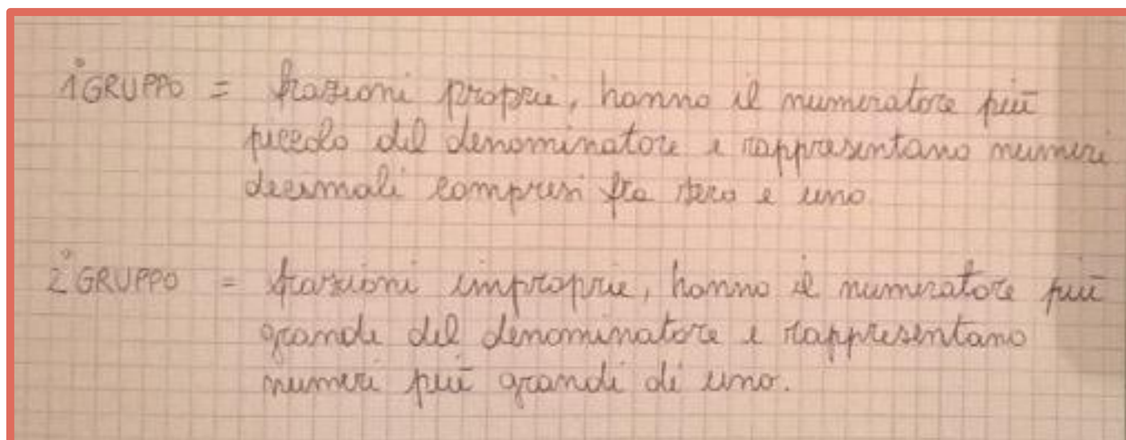
In base al modo in cui hai disegnato le frazioni richieste, in quanti gruppi suddivideresti tali frazioni ?





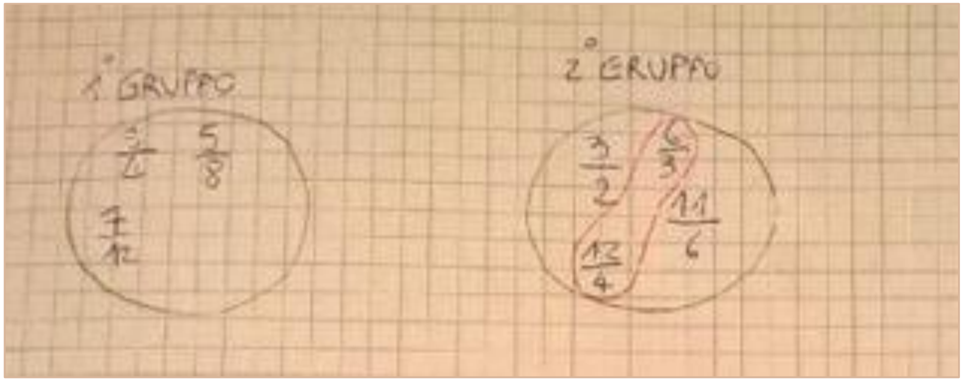


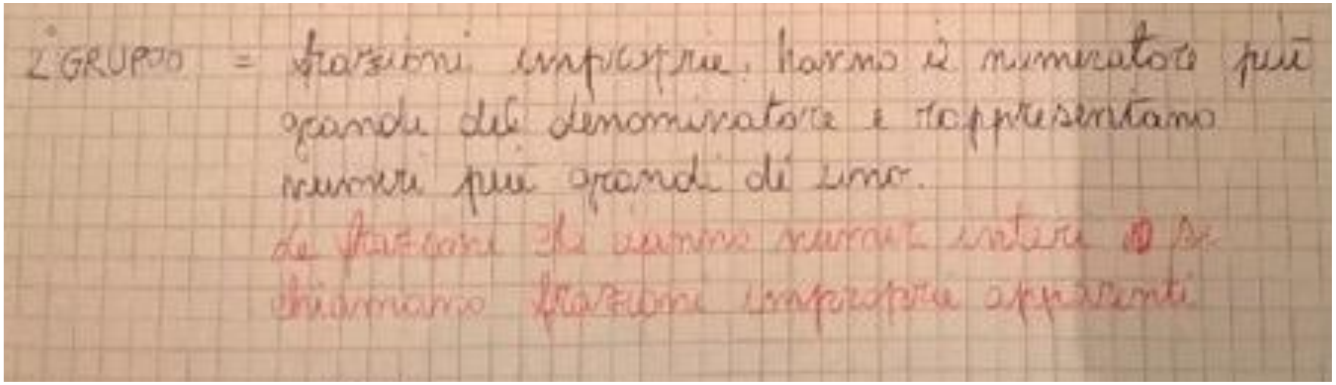
CONCLUSIONI



FRAZIONI PROPRIE, IMPROPRIE ED APPARENTI

All’interno del gruppo delle frazioni improprie cerchia quelle che danno origine a numeri interi:



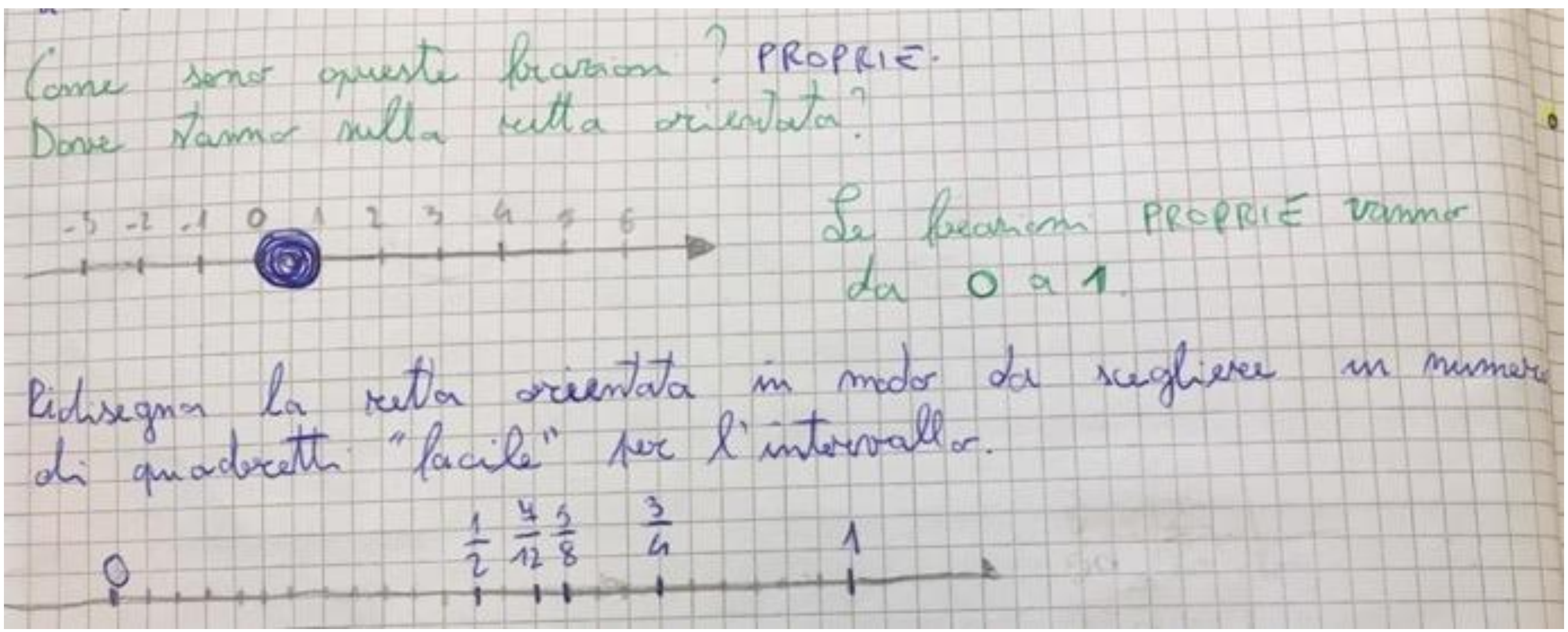


POSIZIONAMENTO SULLA RETTA ORIENTATA

Da subito diamo grande importanza al posizionamento sulla retta orientata.

Date le frazioni $\frac{3}{4}; \frac{5}{8}; \frac{7}{12}; \frac{1}{2}$

- Come sono queste frazioni?
- Dove stanno nella retta orientata?



POSIZIONAMENTO SULLA RETTA ORIENTATA

Per il posizionamento sulla retta orientata può anche essere utile trasformare la frazione in numero decimale

$\frac{3}{4}$ Divido il segmento in 4 parti e ne conto 3.
(ogni parte è di 6 q.) DECIMALE = 0,45

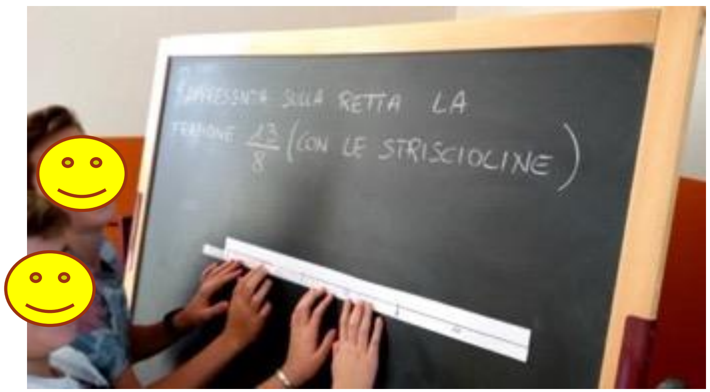
$\frac{5}{8}$ Divido il segmento in 8 parti e ne prendo 5.
(ogni parte è di 3 q.) DECIMALE = 0,625

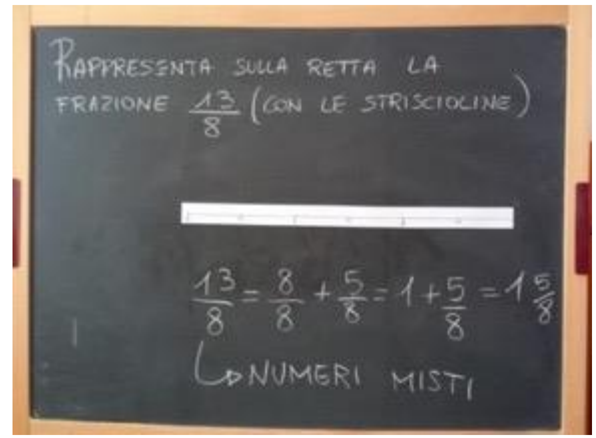
NUMERI MISTI

Le frazioni improprie possono essere espresse come numeri misti, cioè si tengono gli interi e si affianca la parte dopo la virgola con la frazione propria rimanente.

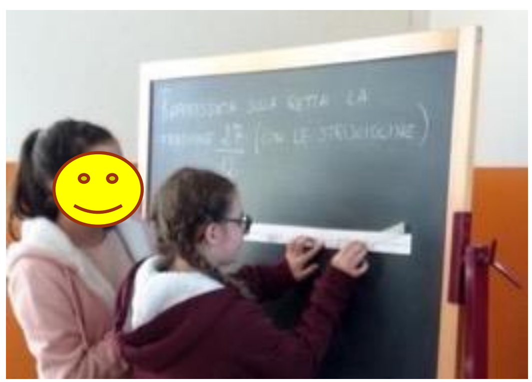
Utile, anche in questo caso, il posizionamento nella retta dei numeri, costruita in modo che ogni strisciolina corrisponda ad un intero:

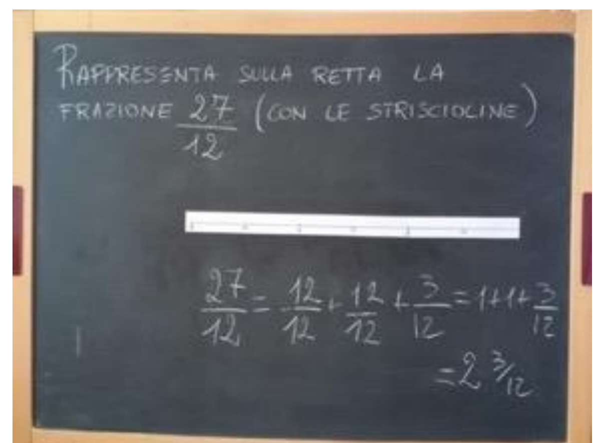
Rappresenta $\frac{13}{8}$:

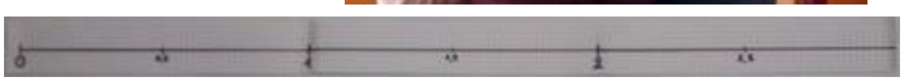




Rappresenta $\frac{27}{12}$:







FASE 3

FRAZIONI EQUIVALENTI

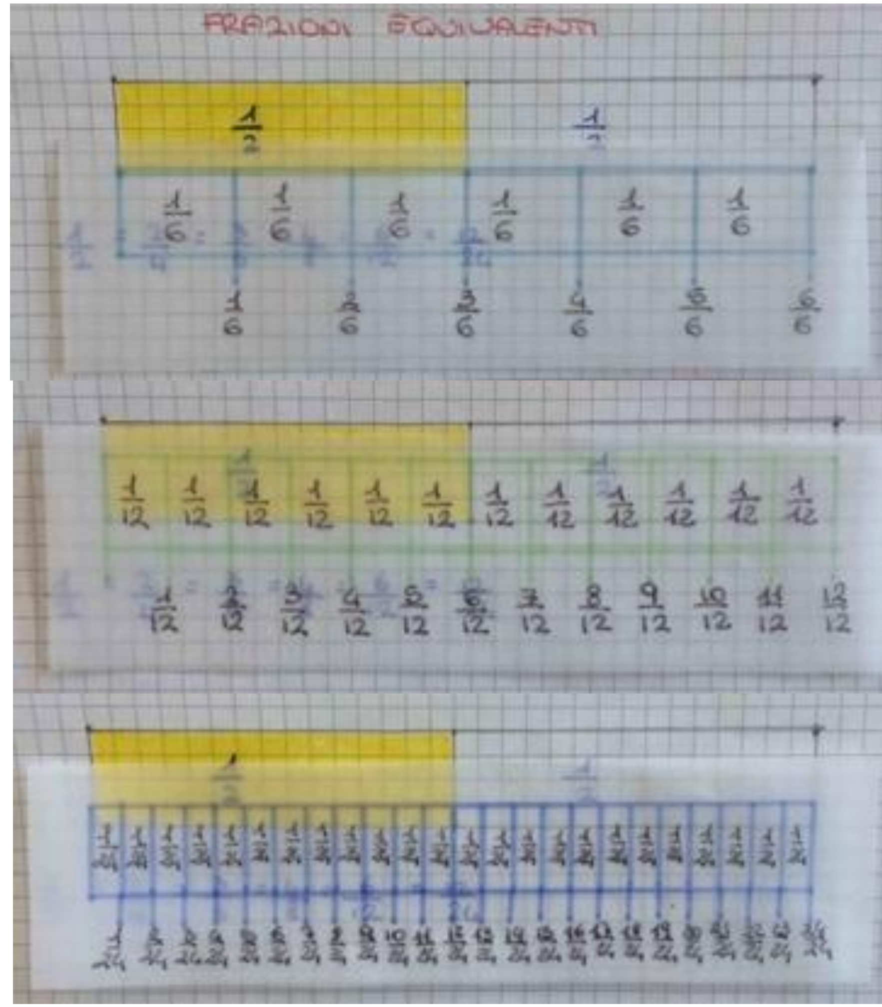
Le frazioni equivalenti sono il nodo centrale da affrontare: quando due frazioni sono uguali (equivalenti)? Quando due frazioni rappresentano lo stesso numero?

Abituati a lavorare con i numeri naturali, gli alunni si meravigliano di fronte al fatto che una stessa quantità può essere rappresentata da infinite frazioni; da qui nasce la necessità di osservare i numeri razionali, di saperli "padroneggiare" e non farsi trasportare da mere applicazioni meccaniche di regole. È importante che il docente sottolinei questo aspetto.

FRAZIONI EQUIVALENTI

Ai ragazzi è stato chiesto di prendere la striscia contenente la frazione $\frac{1}{2}$ e di sovrapporre le altre strisce andando ad individuare quali altre frazioni esprimevano la stessa quantità.

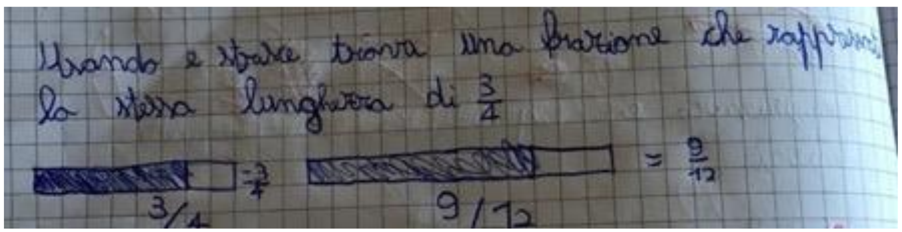
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{6}{12} = \frac{12}{24}$$

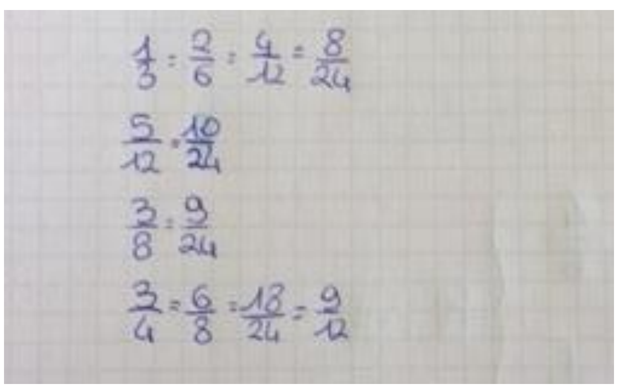


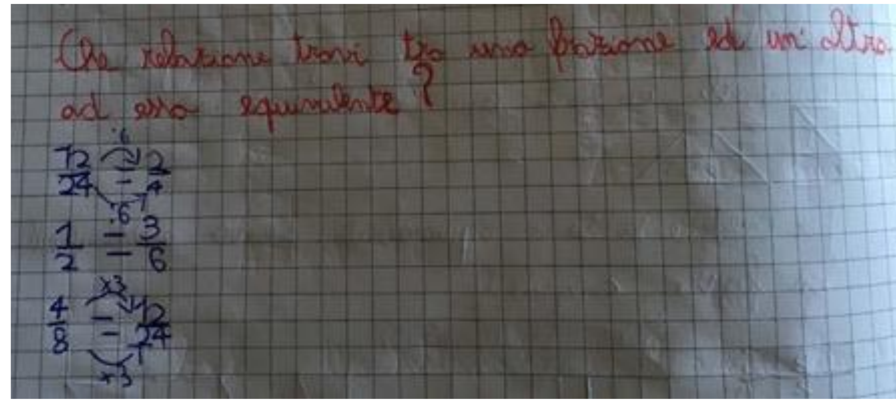
FRAZIONI EQUIVALENTI

È stato chiesto di fare la stessa cosa anche per le frazioni $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{3}{4}$.

È stato poi chiesto di provare ad individuare la regola.





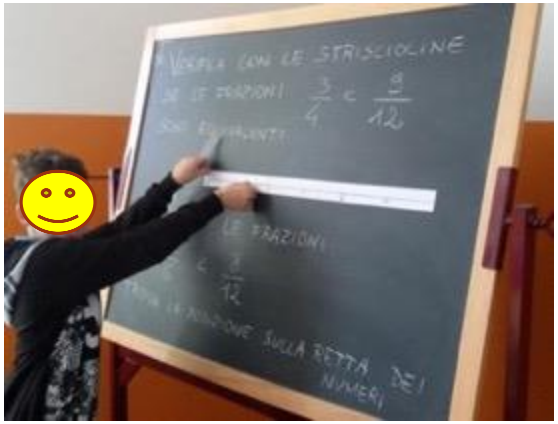


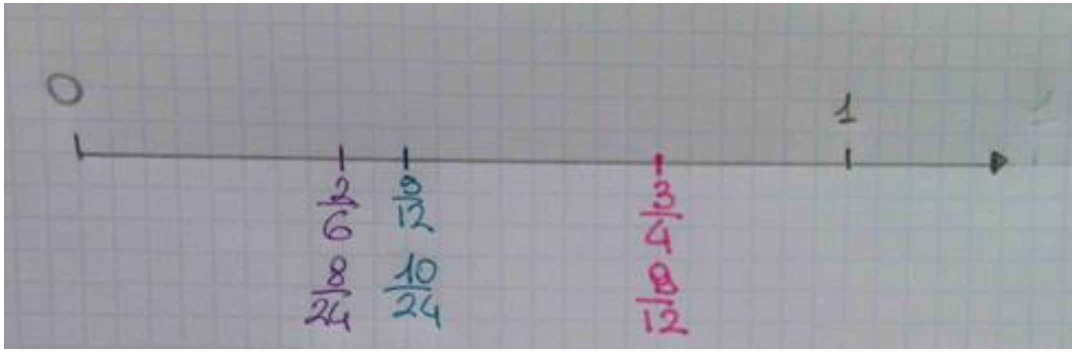
SI DEVE MOLTIPLICARE, O DIVIDERE, NUMERATORE E DENOMINATORE PER LO STESSO NUMERO

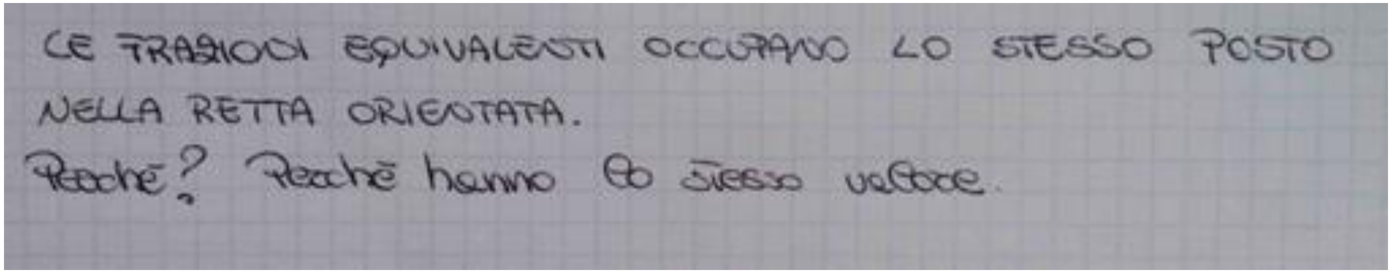
FRAZIONI EQUIVALENTI SULLA RETTA

È stato chiesto di posizionare sulla retta orientata le seguenti frazioni

$\frac{3}{4}$; $\frac{2}{6}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{9}{12}$; $\frac{8}{24}$; $\frac{10}{24}$






LE FRAZIONI EQUIVALENTI OCCUPANO LO STESSO POSTO NELLA RETTA ORIENTATA.
Perché? Perché hanno lo stesso valore.

FASE 4

CONFRONTO TRA FRAZIONI

Le frazioni sono confrontabili solo quando sono riferite ad una stessa grandezza, di conseguenza si possono rappresentare su una retta orientata su cui è fissata un'unità di misura (il posizionamento sulla retta orientata è un tema volontariamente ricorrente in questo percorso perché permette di sperimentare il passaggio della frazione da operatore e numero).

L'utilizzo delle strisce è un valido strumento per ragionare su frazioni aventi numeratore e denominatore diverso.

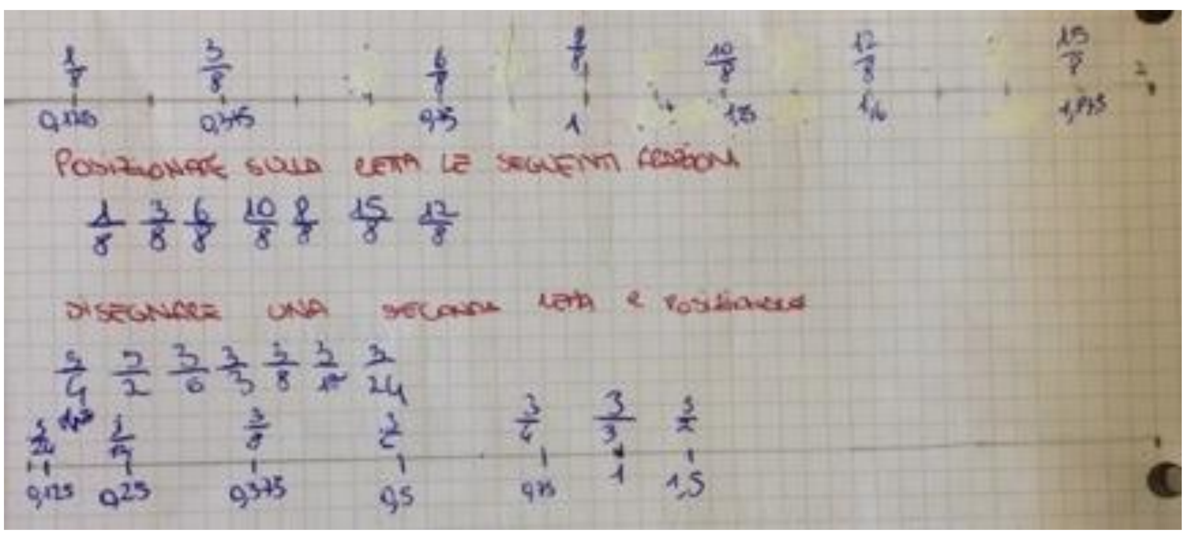
CONFRONTO TRA FRAZIONI

Chiediamo di disegnare una retta orientata lunga almeno 48 quadretti e con l'aiuto delle strisce di posizionare le seguenti frazioni di uguale denominatore:

$\frac{1}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{10}{8} \quad \frac{8}{8} \quad \frac{15}{8} \quad \frac{12}{8}$

Disegniamo una seconda retta, della stessa lunghezza della prima e posizioniamo le seguenti frazioni di uguale numeratore:

$\frac{3}{4} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{12} \quad \frac{3}{24}$



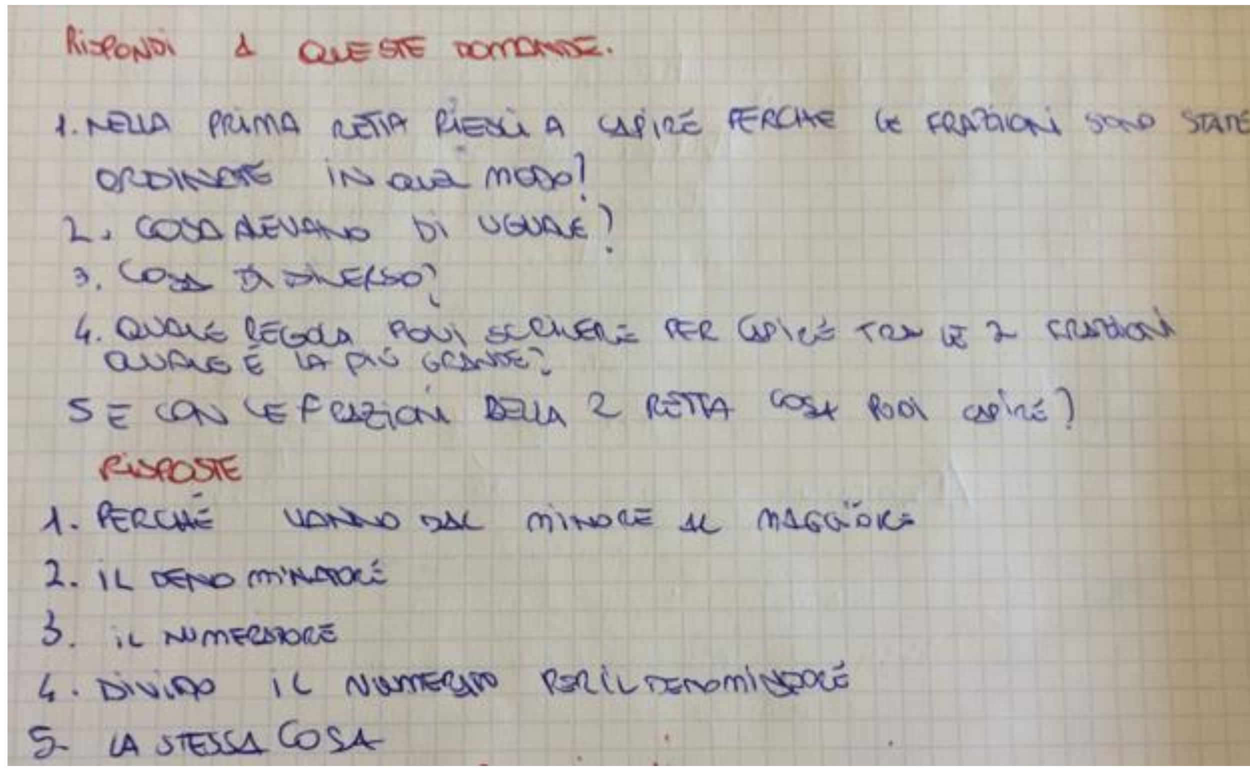
CONFRONTO TRA FRAZIONI

Gli alunni posizionano le frazioni sulla retta e poi rispondono individualmente a queste domande:

- *Nella prima retta riesci a capire perché le frazioni sono state ordinate in quel modo? Cosa avevano di uguale? Cosa di diverso?*

- *Quale regola puoi scrivere per capire tra le due frazioni quale è la più grande?*

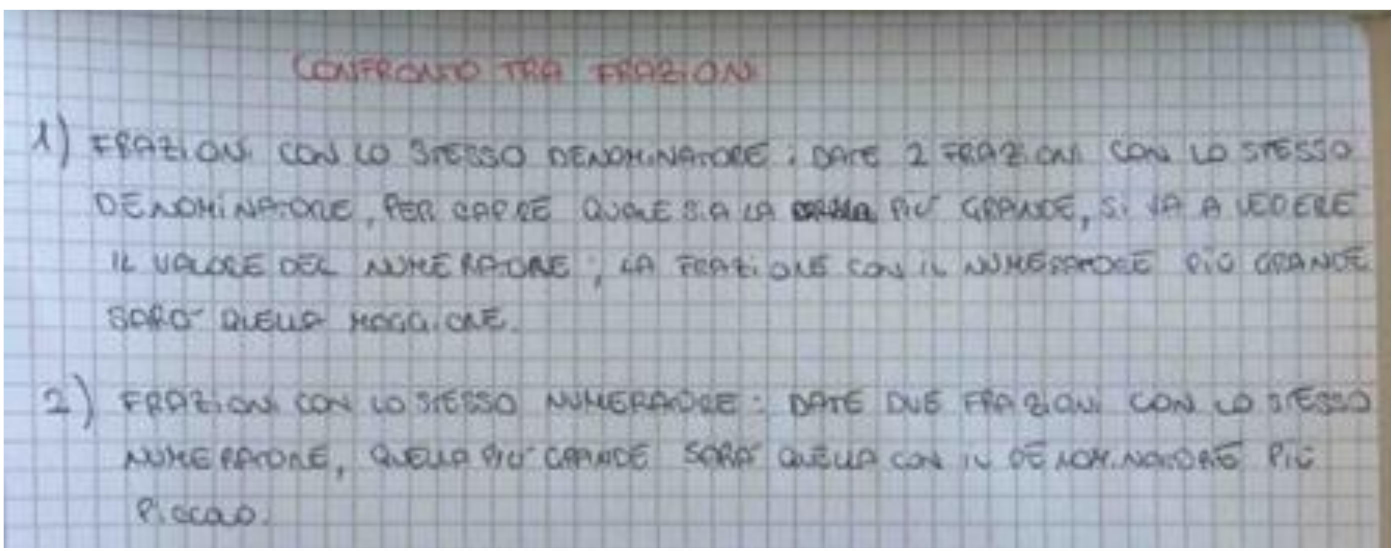
- *E con le frazioni della seconda retta cosa puoi dire?*



CONFRONTO TRA FRAZIONI

Dalle risposte risulta evidente che gli alunni riconoscono uguaglianze e differenze tra le serie di frazioni date, ma quando viene chiesto loro di trovare una regola per il confronto in realtà, si limitano a ricercare il numero corrispondente alla frazione effettuando la divisione. Questo è una conseguenza di un'attività precedente (fase 1), ma è un ottimo spunto di riflessione per la condivisione: è necessario effettuare il calcolo della frazione o esiste un modo più semplice, più conveniente, per confrontare frazioni aventi lo stesso denominatore o lo stesso numeratore?

Stimolati da domande opportune, gli alunni arrivano a scrivere la regola cercata.



CONFRONTO TRA FRAZIONI

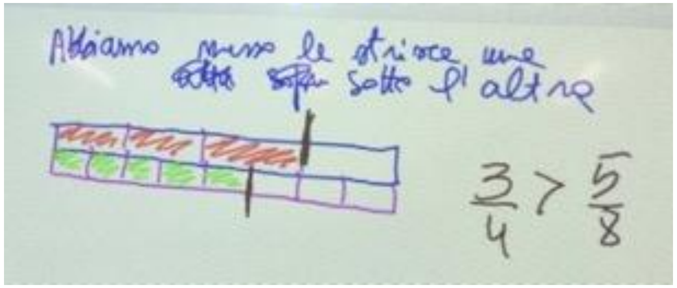
1) FRAZIONI CON LO STESSO DENOMINATORE: DATE 2 FRAZIONI CON LO STESSO DENOMINATORE, PER CAPIRE QUALE SIA LA PIU' GRANDE, SI VA A VEDERE IL VALORE DEL NUMERATORE, LA FRAZIONE CON IL NUMERATORE PIÙ GRANDE SARA' QUELLA MAGGIORE.

2) FRAZIONI CON LO STESSO NUMERATORE: DATE DUE FRAZIONI CON LO STESSO NUMERATORE, QUELLA PIU' GRANDE SARA' QUELLA CON IL DENOMINATORE PIU' PICCOLO.

CONFRONTO TRA FRAZIONI

…. e $\frac{3}{4}$ è maggiore, minore o uguale a $\frac{5}{8}$?

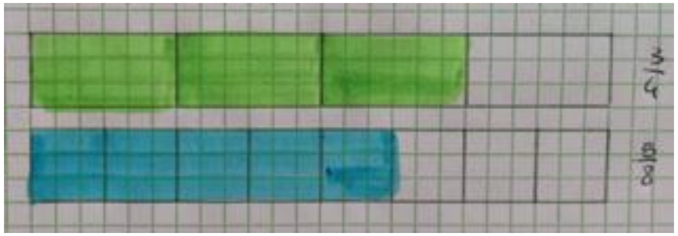
Confrontiamo con le strisce divise in 4 e in 8 parti.
Giulia: "ho piegato la striscia dei quarti per avere $\frac{3}{4}$, poi ho piegato la striscia degli ottavi per avere $\frac{5}{8}$ e le ho confrontate"

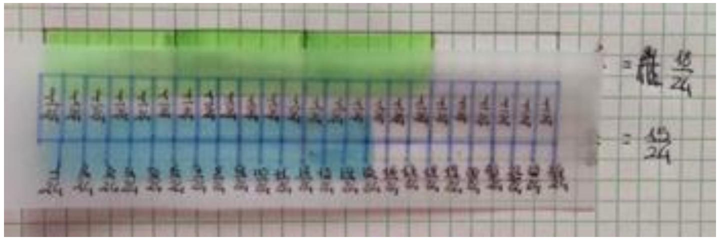


Lo stesso procedimento è stato usato per confrontare altre coppie di frazioni

CONFRONTO TRA FRAZIONI

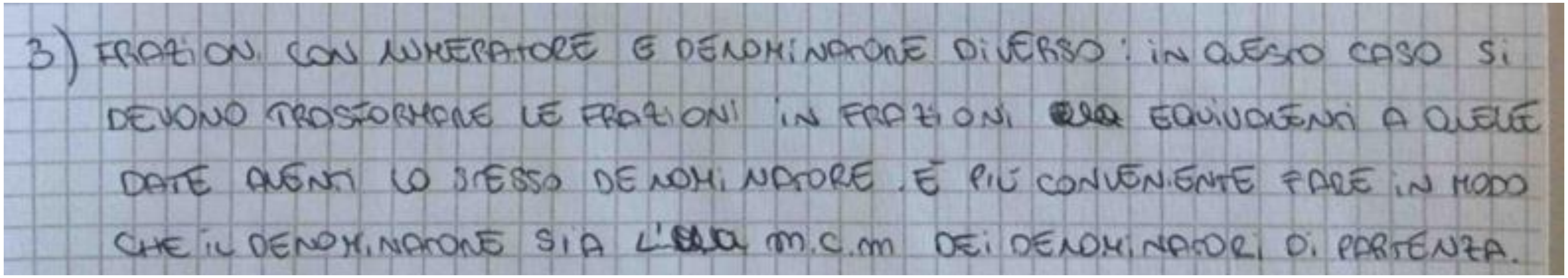
Possiamo trovare ora un altro sistema per confrontare $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{8}$?





I ragazzi hanno cercato tra le strisce in loro possesso quella che permette di trasformare entrambe le quantità in frazioni equivalenti con lo stesso denominatore.

Quale regola possiamo ricavare?



3) FRAZIONI CON NUMERATORE E DENOMINATORE DIVERSO: IN QUESTO CASO SI DEVONO TRASFORMARE LE FRAZIONI IN FRAZIONI EQUIVALENTI A QUELLE DATE AVENTI LO STESSO DENOMINATORE. È PIÙ CONVENIENTE FARE IN MODO CHE IL DENOMINATORE SIA L'm.c.m DEI DENOMINATORI DI PARTENZA.

CONFRONTO TRA FRAZIONI

Si sfruttano nuovamente domande presenti nelle prove nazionali dei precedenti anni scolastici per riflettere e ragionare sulle frazioni.

D26. Considera la frazione $\frac{400}{500}$.

Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

		V	F
a.	Aggiungo 1 al numeratore: $\frac{401}{500}$ è maggiore di $\frac{400}{500}$	☐	☐
b.	Aggiungo 1 al denominatore: $\frac{400}{501}$ è minore di $\frac{400}{500}$	☐	☐
c.	Aggiungo 1 sia al numeratore sia al denominatore: $\frac{401}{501}$ è equivalente a $\frac{400}{500}$	☐	☐
d.	Sottraggo 1 sia al numeratore sia al denominatore: $\frac{399}{499}$ è equivalente a $\frac{400}{500}$	☐	☐

FASE 5

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE TRA FRAZIONI

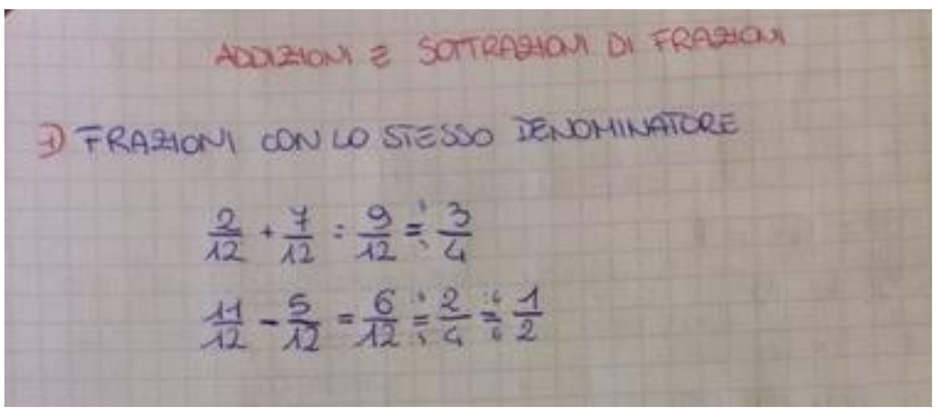
La prima operazione che si affronta è la somma di frazioni.

Storicamente c'è l'inconveniente che l'addizione, cioè l'operazione più amata dagli studenti, i quali vi ricorrono anche quando ci sarebbero scorciatoie o addirittura quando non è richiesto, diventa l'operazione più difficile da eseguire.

Concettualmente è un'applicazione dell'equivalenza di frazioni, ma questa viene completamente messa in ombra se si inizia l'argomento con la ricerca del m.c.m. dei denominatori. Questa "regola" dovrebbe essere il punto di arrivo, una scoperta degli studenti.

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE TRA FRAZIONI con lo stesso denominatore

Nel caso delle addizioni tra frazioni con lo stesso denominatore è stato chiesto ai ragazzi di disegnare sul quaderno il primo addendo utilizzando le strisce (fig. 1) e consecutivamente il secondo addendo (fig. 2). Poi utilizzando la stessa striscia, sovrapponendola a quanto disegnato, trovare il risultato (fig. 3).



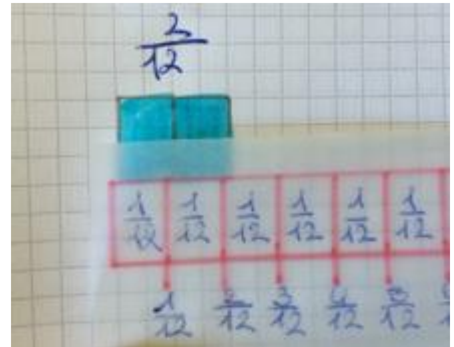


Fig.1

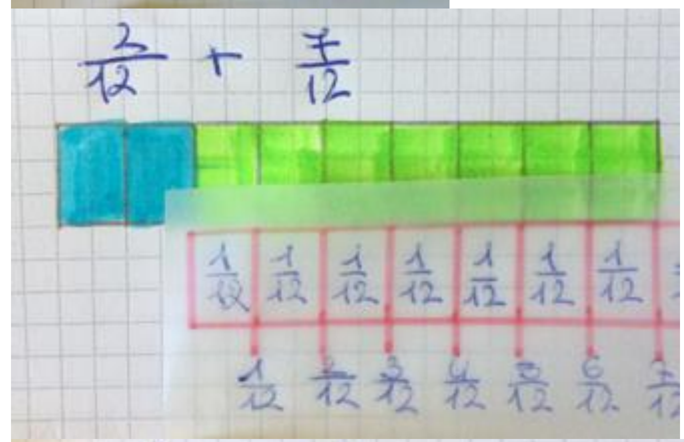


Fig.2

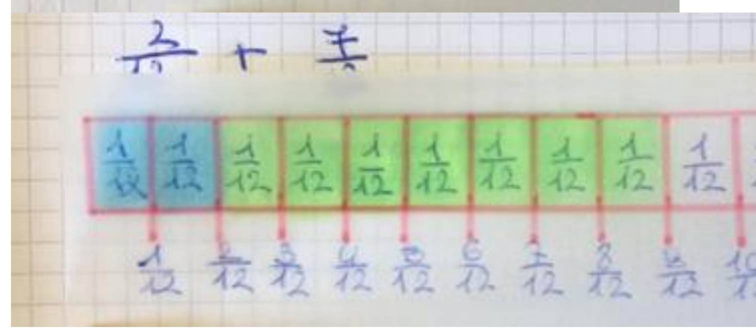
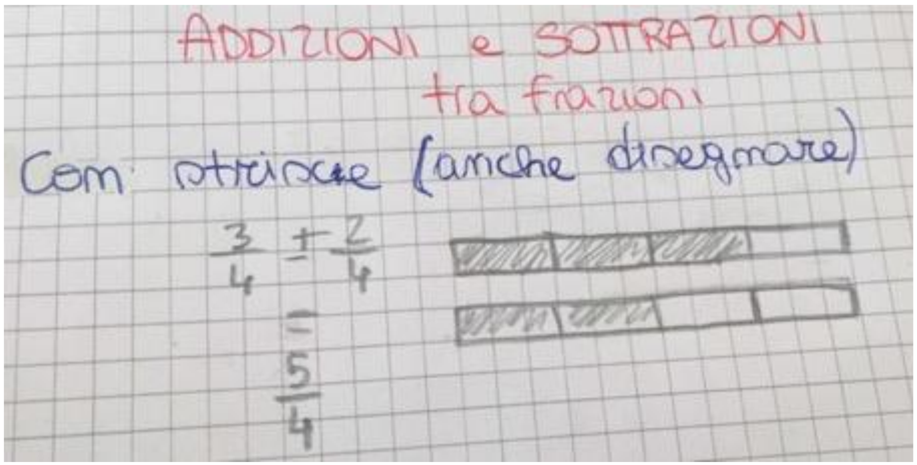
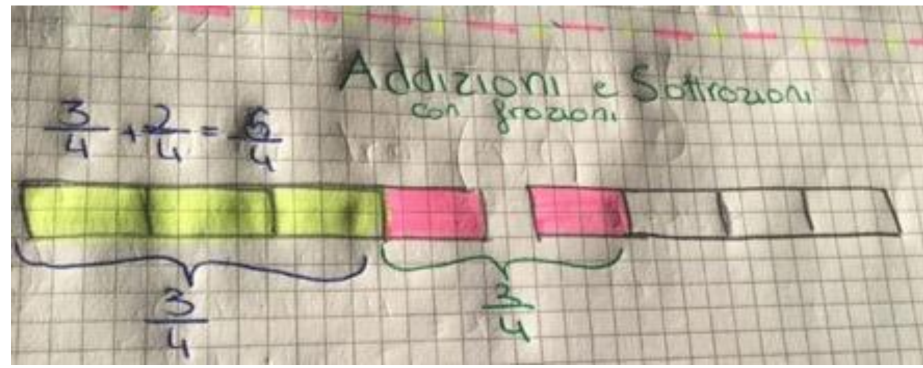


Fig.3

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE TRA FRAZIONI
con lo stesso denominatore

Quella proposta non è l'unica rappresentazione grafica possibile. Altri alunni hanno proposto le seguenti alternative.

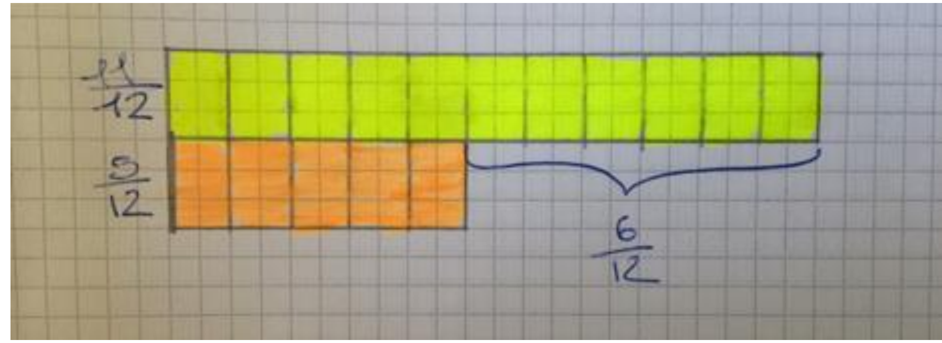


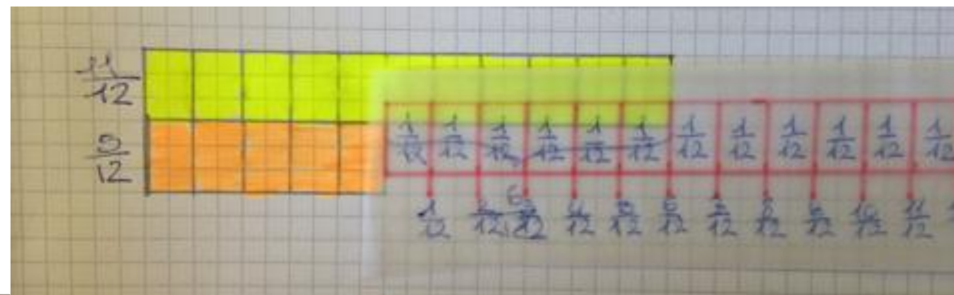


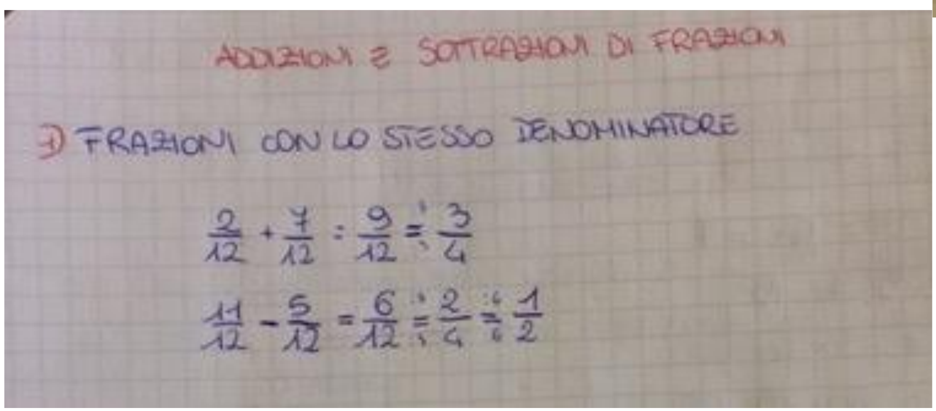
Come risulta evidente dalle immagini, non sono state usate le strisce per effettuare il disegno, ma è risultato utile avere altre rappresentazioni grafiche da commentare, considerando il fatto che l'obiettivo finale è effettuare le addizioni senza l'ausilio dello strumento grafico: è solo il mezzo per arrivare alla concettualizzazione.

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE TRA FRAZIONI con lo stesso denominatore

Nel caso delle sottrazioni tra frazioni con lo stesso denominatore viene fatto disegnare sul quaderno il primo termine sempre utilizzando le strisce, mentre il secondo termine sovrapposto ad un estremo del primo. Poi utilizzando la stessa striscia, sovrapponendola a quanto disegnato, trovare il risultato.



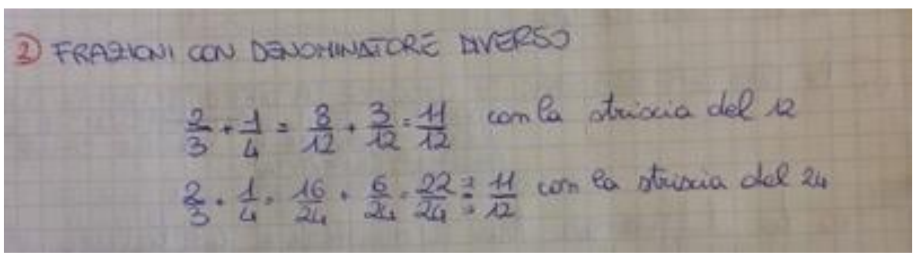


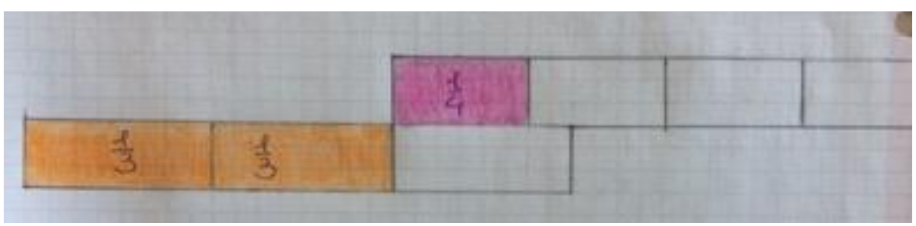


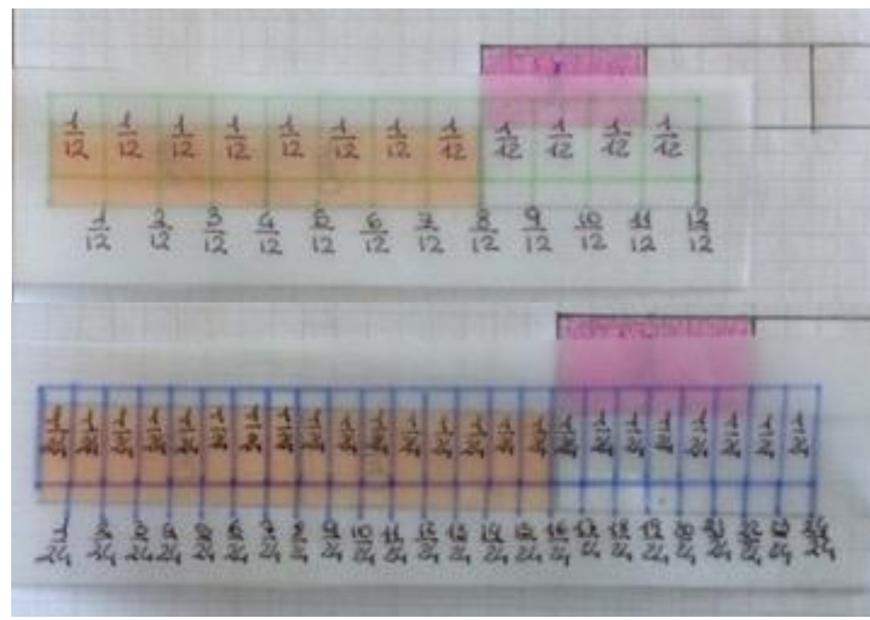
ADDIZIONE E SOTTRAZIONE TRA FRAZIONI con denominatore diverso

Nel caso delle addizioni tra frazioni con denominatore diverso viene chiesto ai ragazzi di prendere le strisce contenenti i due addendi

($\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$) posizionando il secondo addendo consecutivamente al primo. Per trovare il risultato viene chiesto di sovrapporre le altre strisce fino a che non si trova quella che permette di trasformare entrambi gli addendi in frazioni equivalenti con lo stesso denominatore.







ADDIZIONE E SOTTRAZIONE TRA FRAZIONI con denominatore diverso

Emerge subito che esiste più di un risultato corretto ($\frac{11}{12}$ e $\frac{22}{24}$) sono equivalenti. Quale usare?

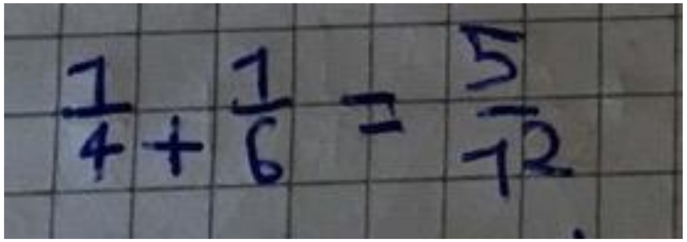
Dal momento che l'utilizzo delle strisce mira alla ricerca di frazioni equivalenti, gli studenti ormai sanno che ogni frazione possiede infinite frazioni equivalenti, quindi quale scegliere? È più **conveniente** usare la striscia il cui denominatore è dato dal mcm degli altri due denominatori perché posso lavorare con numeri più piccoli.

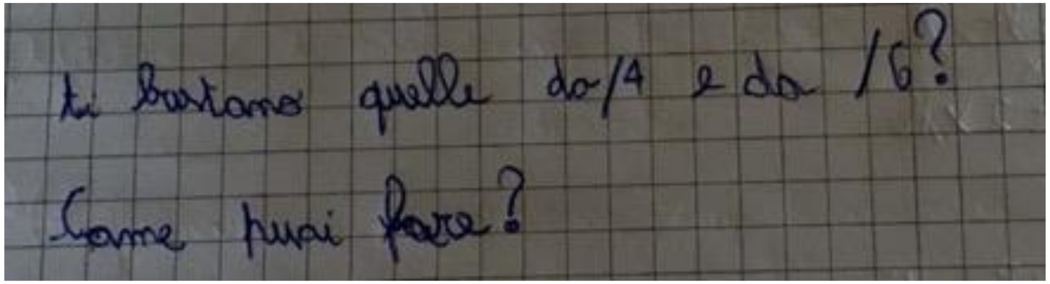
Una riflessione

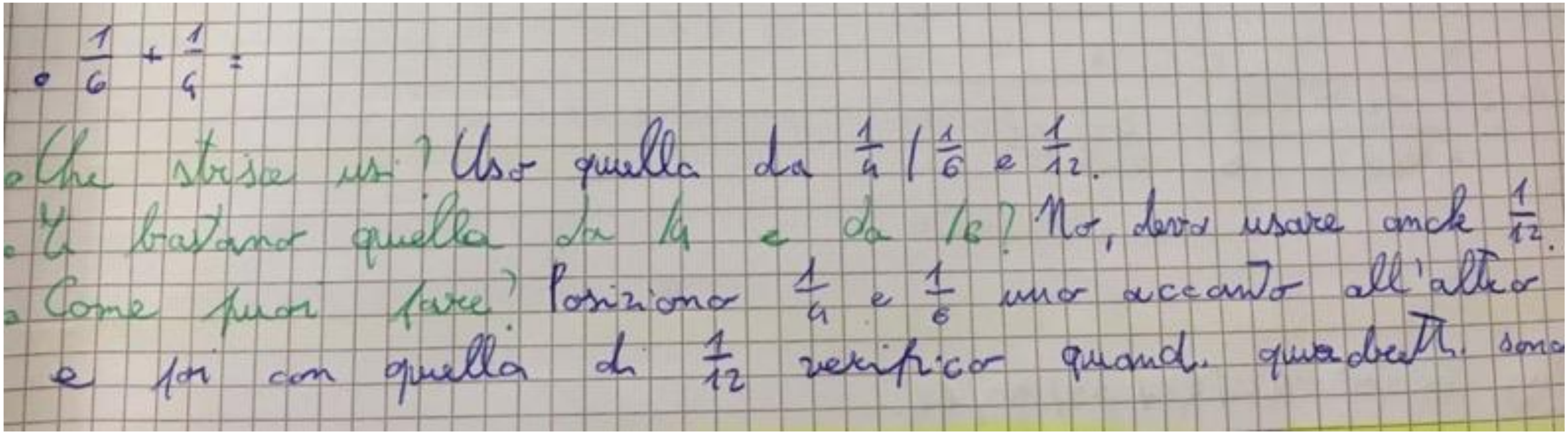
Trovare il minimo comune denominatore non è un obbligo, è una possibilità: non è detto che sia la più conveniente, non è detto che sia la più opportuna. È vero che con il m.c.m. si usano numeri più piccoli, ma non è detto che il calcolo sia più semplice e veloce. Il calcolo del m.c.m. dovrebbe essere fatto a mente, e non con la scomposizione in fattori primi, anche perché nella maggior parte delle espressioni è facilmente identificabile. Se la sua individuazione è difficoltosa, si potrebbe suggerire di moltiplicare i denominatori tra loro: non sarà il primo ma è comunque un multiplo comune.

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE TRA FRAZIONI
con denominatore diverso

Altri esempi:

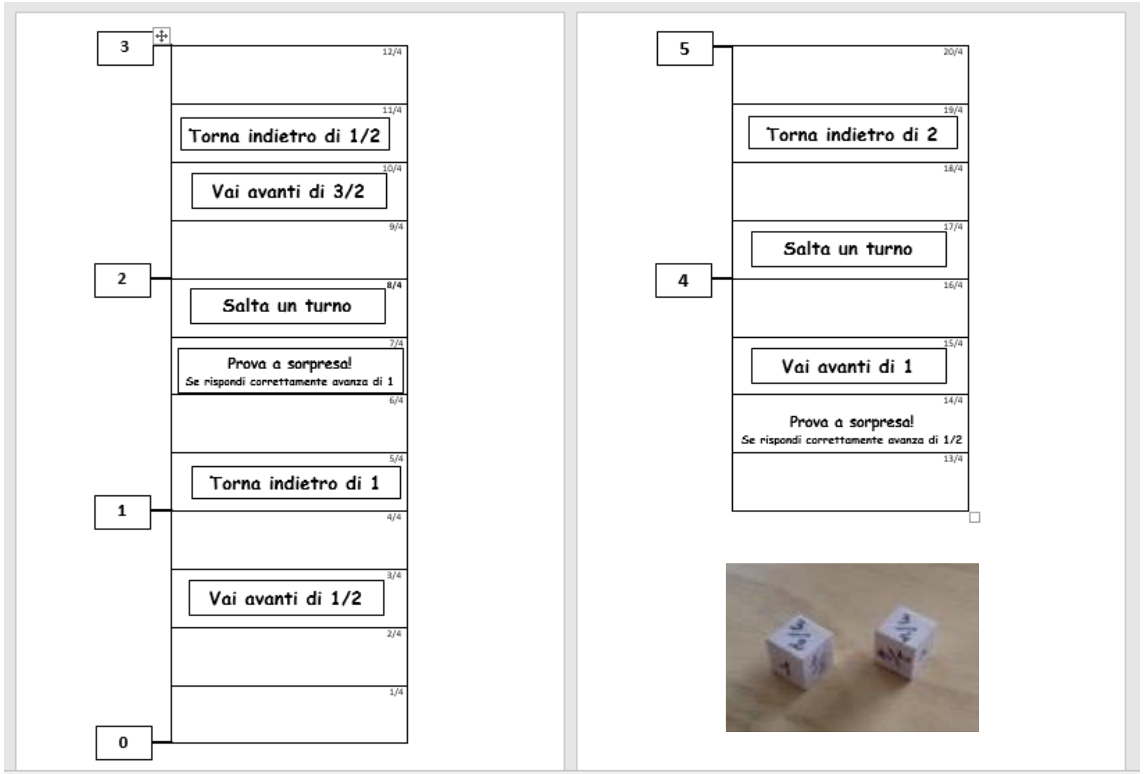






GIOCHIAMO CON LE FRAZIONI

1. Per allenarci un po'…



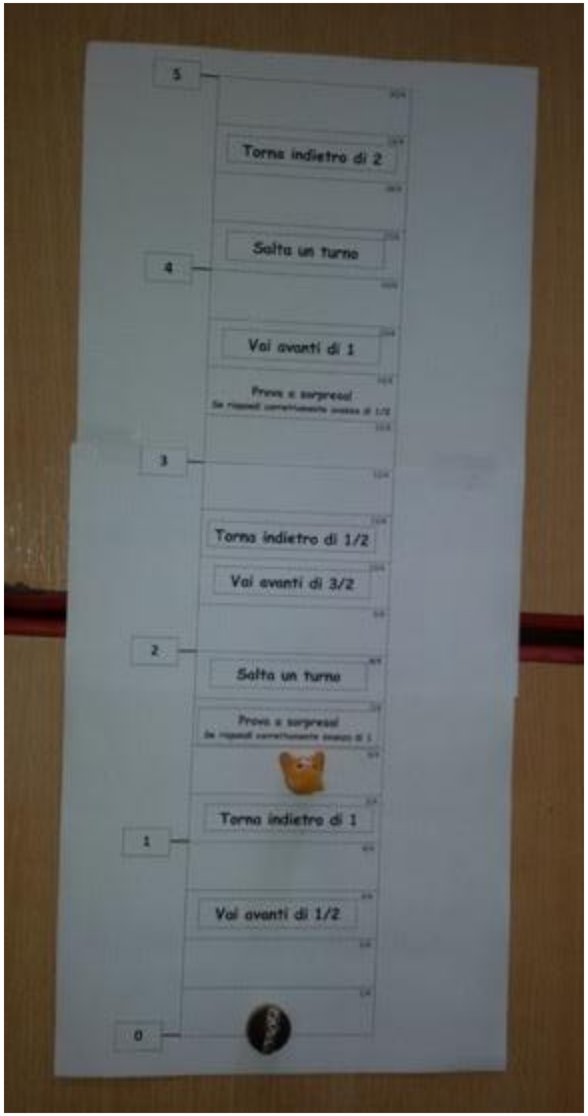
Dopo aver imparato ad eseguire l'addizione e la sottrazione con le frazioni si può fare un gioco, analogo al gioco dell'oca, per rendere più piacevole l'ora di Matematica e allo stesso tempo consolidare le abilità di calcolo dei ragazzi.

Per iniziare è stato proposto uno schema abbastanza semplice, con dadi (realizzati con semplici cubetti bianchi) aventi sulle facce soltanto frazioni con denominatore 2 o 4, oltre al numero 1:

$$\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{3}{4}\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ \frac{2}{4}\ ,\ 1$$

Del resto queste sono le frazioni in cui è più probabile imbattersi nella vita di tutti i giorni…

GIOCHIAMO CON LE FRAZIONI

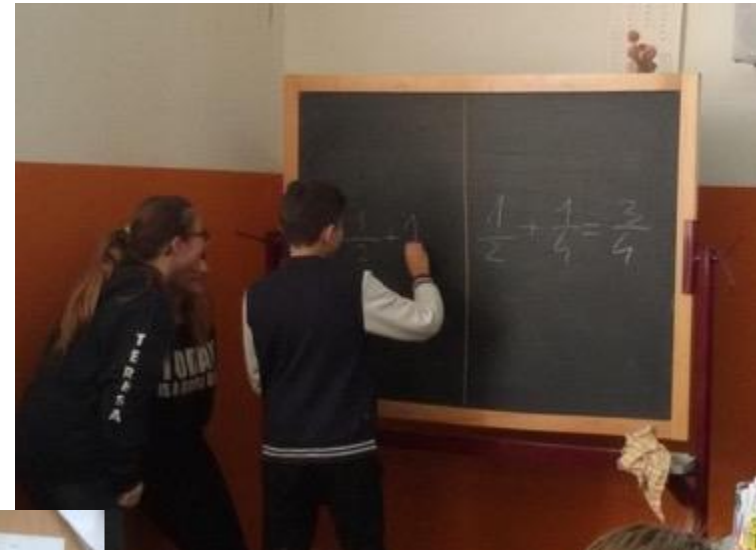


Il cartellone, preparato dall'insegnante, evidenzia bene l'equivalenza tra frazioni apparenti e numeri interi.

Come nel gioco dell'oca tradizionale il tabellone prevede anche di tornare indietro di un numero intero o di una frazione, in modo da dover eseguire anche delle sottrazioni.
La presenza, sui dadi e sul tabellone, di numeri interi e frazioni porta ad avere a che fare anche con i numeri misti.

Per coinvolgere tutti i ragazzi la classe viene divisa in quattro gruppi, due giocano al tavolo ed altri due eseguono le operazioni alla lavagna.

GIOCHIAMO CON LE FRAZIONI



Ogni gruppo alla lavagna fa da supporto ad uno dei gruppi al tavolo da gioco. Se il calcolo viene eseguito in modo errato si salta un turno.

Dopo aver eseguito alcune operazioni tutti i ragazzi hanno dimostrato di saper eseguire rapidamente e correttamente addizioni e sottrazioni con «mezzi», «quarti» e numeri interi.

GIOCHIAMO CON LE FRAZIONI

2. Progettiamo, realizziamo ed utilizziamo il GIOCO DELLA RANA

Dopo aver dedicato un paio d’ore al gioco precedente, alternando i gruppi al tabellone e alla lavagna, è stato proposto di progettare e realizzare un gioco analogo, ma più complesso. Unico vincolo l’utilizzo di dadi «frazionari» portati dall’insegnante:

Dado 1: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}$

Dado 2: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{11}{12}$

I ragazzi notano che le frazioni riportate sul secondo dado sono complementari a quelle del primo.
Si pone il problema di «trovare il passo» per potersi muovere agevolmente sul tabellone. Si conclude di dover dividere le unità in 24esimi, essendo 24 il m.c.m tra i denominatori. Questa discussioe preparatoria è stata un momento fondamentale della progettazione, dove si è ribadito la necessità di portare le frazioni ad un denominatore comune per poterle sommare o sottrarre.

GIOCHIAMO CON LE FRAZIONI

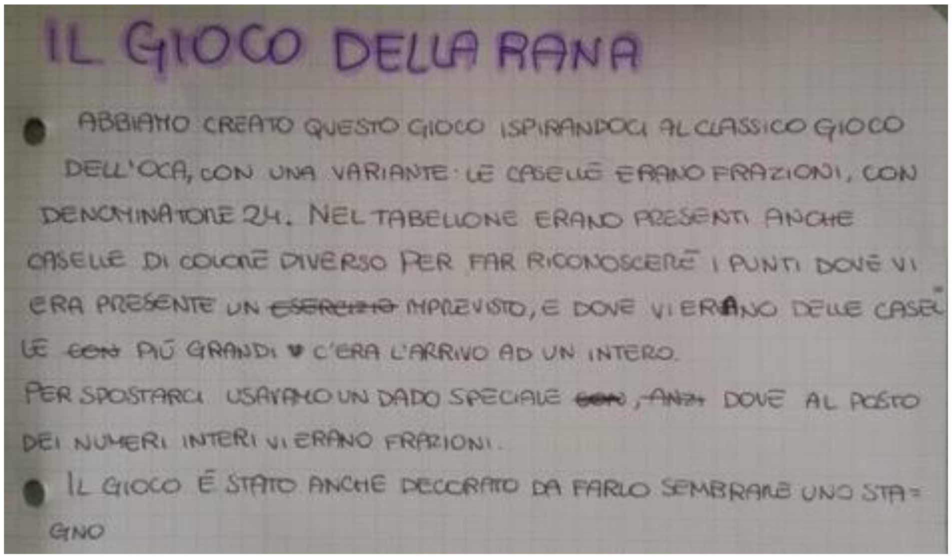
Si passa ora ad elaborare, condividere e scrivere i criteri per realizzare il tabellone, di cui ogni ragazzo curerà una parte:

- *Il punto di partenza e di arrivo sono delle isolette nello stagno*
- *Si arriva fino a 3 (per un totale di 72 caselle)*
- *Ogni casella è rappresentata da un cerchio verde chiaro*
- *Le posizioni corrispondenti ai numeri interi (frazioni apparenti) vengono evidenziate mediante cerchi più grandi di colore verde scuro*
- *Si introducono alcune caselle colorate (rosa, arancio, giallo o rosso) corrispondenti a degli imprevisti*
- *Per ogni imprevisto si pescherà una carta su cui saranno riportate indicazioni tipo «avanza di 1», «torna indietro di ½», oppure quesiti matematici da risolvere per non saltare il turno successivo*
- *La penultima casella comporterà il ritorno all'inizio del tabellone*

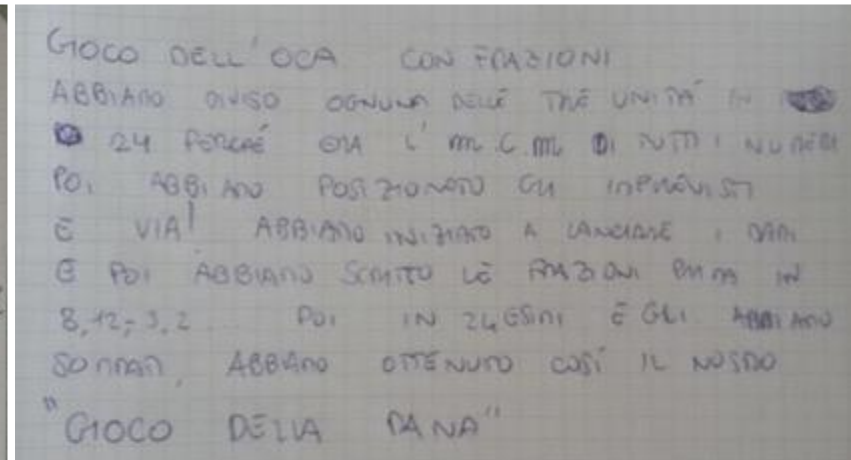
Al di là degli aspetti estetici, è stata importante e stimolante la discussione sugli aspetti più matematici del cartellone, proposti dagli alunni sotto la guida dell'insegnante.

GIOCHIAMO CON LE FRAZIONI

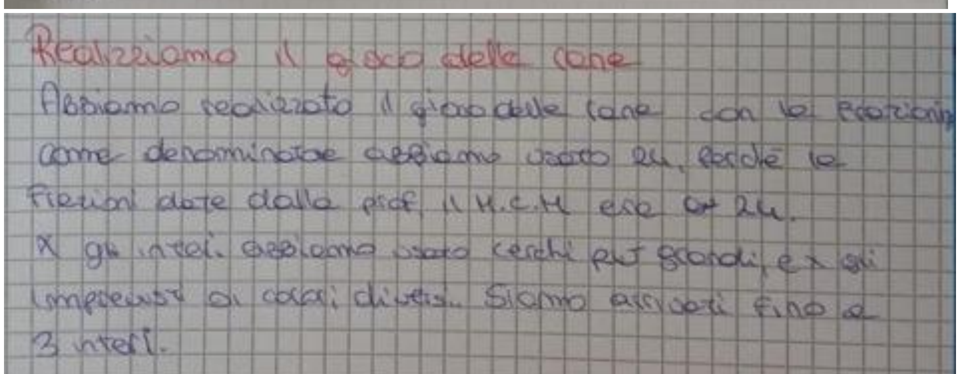
I ragazzi, per casa, hanno scritto una breve relazione sull'attività di progettazione collettiva:


IL GIOCO DELLA RANA

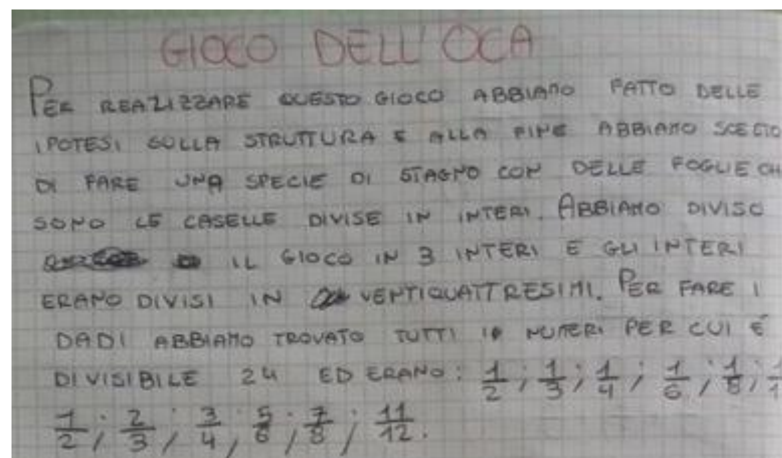
- ABBIAMO CREATO QUESTO GIOCO ISPIRANDOCI AL CLASSICO GIOCO DELL'OCA, CON UNA VARIANTE: LE CASELLE ERANO FRAZIONI, CON DENOMINATORE 24. NEL TABELLONE ERANO PRESENTI ANCHE CASELLE DI COLORE DIVERSO PER FAR RICONOSCERE I PUNTI DOVE VI ERA PRESENTE UN ~~ESERCIZIO~~ IMPREVISTO, E DOVE VI ERANO DELLE CASELLE ~~CON~~ PIÙ GRANDI C'ERA L'ARRIVO AD UN INTERO.
PER SPOSTARCI USAVAMO UN DADO SPECIALE ~~CON~~, ~~ANZI~~ DOVE AL POSTO DEI NUMERI INTERI VI ERANO FRAZIONI.
- IL GIOCO È STATO ANCHE DECORATO DA FARLO SEMBRARE UNO STAGNO


GIOCO DELL'OCA CON FRAZIONI

ABBIAMO DIVISO OGNUNA DELLE TRE UNITÀ IN 24 PERCHÉ ERA L'm.c.m. DI TUTTI I NUMERI. POI ABBIAMO POSIZIONATO GLI IMPREVISTI E VIA! ABBIAMO INIZIATO A LANCIARE I DADI E POI ABBIAMO SCRITTO LE FRAZIONI PRIMA IN 8, 12, 3, 2 POI IN 24ESIMI E GLI ABBIAMO SOMMATI. ABBIAMO OTTENUTO COSÌ IL NOSTRO "GIOCO DELLA RANA"

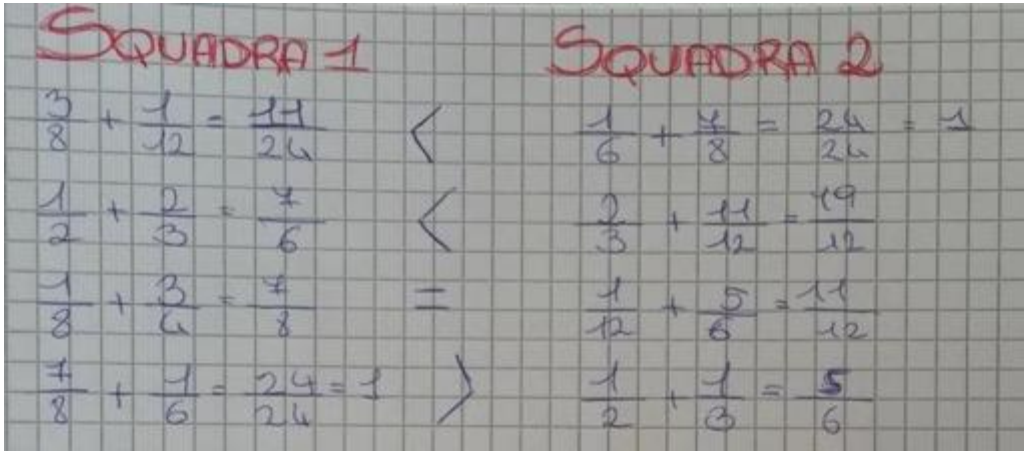

Realizziamo il gioco della rana

Abbiamo realizzato il gioco della rana con le frazioni come denominatore abbiamo usato 24, perché le frazioni date dalla prof. il M.C.M. era 24. X gli interi abbiamo usato cerchi più grandi, e x gli imprevisti di colori diversi. Siamo arrivati fino a 3 interi.

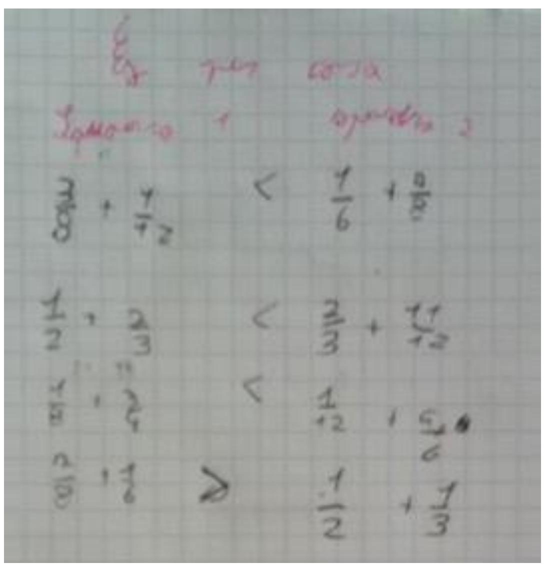

GIOCO DELL'OCA

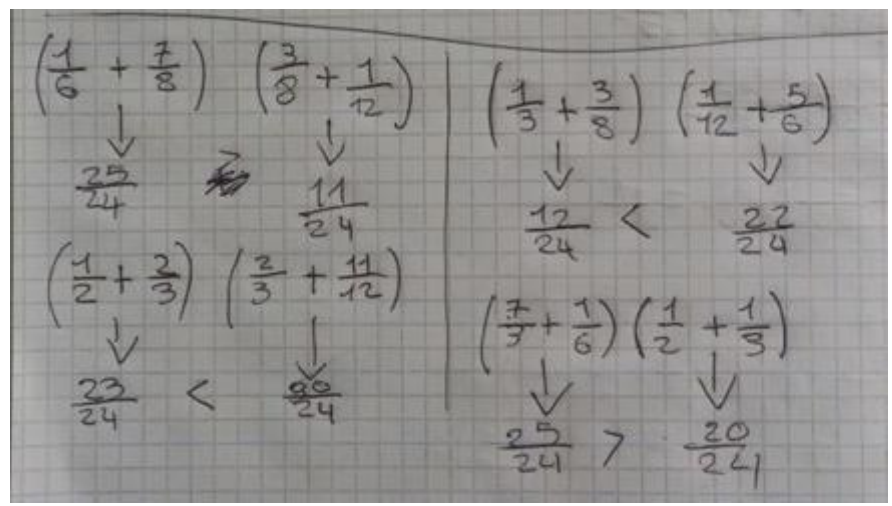
PER REALIZZARE QUESTO GIOCO ABBIAMO FATTO DELLE IPOTESI SULLA STRUTTURA E ALLA FINE ABBIAMO SCELTO DI FARE UNA SPECIE DI STAGNO CON DELLE FOGLIE CHE SONO LE CASELLE DIVISE IN INTERI. ABBIAMO DIVISO IL GIOCO IN 3 INTERI E GLI INTERI ERANO DIVISI IN VENTIQUATTRESIMI. PER FARE I DADI ABBIAMO TROVATO TUTTI I NUMERI PER CUI È DIVISIBILE 24 ED ERANO: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{11}{12}$.

GIOCHIAMO CON LE FRAZIONI



Vengono assegnate anche possibili coppie di frazioni ottenibili con i dadi del gioco. I ragazzi devono eseguire la somma, confrontare i risultati e quindi stabilire chi vincerebbe.





GIOCHIAMO CON LE FRAZIONI

Dalle parole ai fatti:

Il tabellone è pronto!

Le rane pure!

GIOCHIAMO CON LE FRAZIONI

E ora si gioca…

I ragazzi svolgono i calcoli alla lavagna tradizionale e alla lim.

Tutti i componenti della squadra alla lavagna devono controllare e confermare il risultato calcolato dal compagno.

Per poter effettuare gli spostamenti sul cartellone è necessario che qualsiasi risultato sia espresso mediante una frazione avente 24 come denominatore.

GIOCHIAMO CON LE FRAZIONI

In base al risultato calcolato alla lavagna i giocatori devono eseguire altre addizioni per spostarsi dalla posizione iniziale. Se si finisce su una casella rossa o gialla o rosa si pesca una carta che corrisponderà ad una penalità o ad un premio (rispettivamente arretrare o avanzare di una quantità assegnata).
Alcune carte-imprevisto comportano di dover risolvere semplici quesiti matematici.

GIOCHIAMO CON LE FRAZIONI

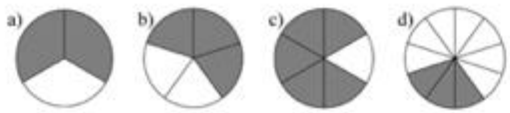
Come nel gioco dell'oca tradizionale, una volta superati i 72/24 si torna indietro e si gioca con un solo dado.
Non è facile arrivare esattamente al traguardo, ma alla fine…

… Ecco i vincitori!

VERIFICHE DEGLI APPRENDIMENTI

1.Quale parte della figura è stata colorata?

2.Quale parte di pizza è stata mangiata? La parte mangiata è in bianco.



3. Ad un concerto partecipano 42 persone, di cui 5/7 sono adulti. Quanti sono i bambini?

4. Disegna la retta orientata e posizionaci sopra i seguenti numeri, sia in forma frazionaria che in forma decimale:

$$\frac{3}{4} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{6}{12} \quad \frac{9}{8}$$

5. Scrivi le seguenti frazioni improprie come numeri misti:

$\frac{7}{2} =$ $\qquad$ $\frac{34}{5} =$

6. Scrivi tre frazioni equivalenti a $\frac{3}{4}$: a) _____ b) _____ c) _____

7.Completa inserendo il numero giusto per rendere vere le uguaglianze.

a) $\frac{2}{5} = \frac{6}{\square}$ $\qquad$ b) $\frac{2}{3} = \frac{10}{\square}$ $\qquad$ c) $\frac{21}{15} = \frac{\square}{5}$

VERIFICHE DEGLI APPRENDIMENTI

8. Inserisci il simbolo <, > o =, spiegando brevemente il procedimento usato.

$\frac{5}{3} \square \frac{3}{4}$ $\qquad$ $\frac{1}{5} \square \frac{1}{8}$ $\qquad$ $\frac{3}{2} \square \frac{7}{4}$

....

....

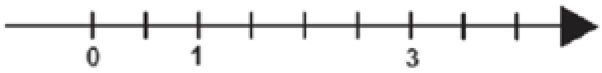
....

9. Riduci le frazioni ai minimi termini.

a) $\frac{12}{32}$ $\qquad$ b) $\frac{15}{45}$ $\qquad$ c) $\frac{16}{40}$ $\qquad$ d) $\frac{21}{63}$

10. Sul tavolo ci sono due tipi di bottoni. Quanti bottoni con due buchi bisogna togliere perché la frazione di bottoni con quattro buchi diventi un terzo del totale?

11. Dalla PN 2011 – classe I



Posiziona sulla retta i numeri seguenti:

2 $\qquad$ 2,5 $\qquad$ $\frac{3}{2}$ $\qquad$ $\frac{5}{10}$

12. Dalla PN 2010

In quale di queste sequenze i numeri sono in ordine crescente? Spiega il ragionamento.

☐	A.	$\frac{3}{100}$	0,125	$\frac{1}{3}$	0,65
☐	B.	0,125	$\frac{3}{100}$	0,65	$\frac{1}{3}$
☐	C.	0,65	0,125	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{100}$
☐	D.	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{100}$	0,65	0,125

....

....

....

....

UNA RIFLESSIONE CONCLUSIVA

Si riporta una riflessione tratta dall'articolo "Le frazioni nella struttura moltiplicativa, nodi concettuali ed ostacoli" di Anna Paola Longo che descrive bene le motivazioni del gruppo di ricerca LSS.

"Fare esperienza è l'avvio dei processi conoscitivi anche in matematica. Le idee matematiche nascono in modo intuitivo, si arricchiscono poi di connotazioni e proprietà, passano da un primo livello implicito alla totale esplicitazione; la loro formulazione avviene all'inizio con il linguaggio comune, che man mano si trasforma in un linguaggio più specifico, fatto di parole e di simboli.

....

La rappresentazione grafica è utile quando è uno strumento per analizzare il testo dal punto di vista del significato, per porre in evidenza le azioni e le relazioni che si sta imparando a trasferire nel linguaggio simbolico, proprio della matematica. Mediante la rappresentazione avvengono vari passi: si isola un'idea (aggiungere, unire, fare parti uguali e prenderne alcune, confrontare grandezze secondo un criterio, ecc.), se ne produce un'immagine astratta (l'operazione, la misura, ecc.), si inizia a simbolizzare per averne una rappresentazione sintetica, si accede ai simboli convenzionali e ad un iniziale linguaggio specifico che utilizza tali simboli. Il disegno, la spiegazione scritta o orale, la narrazione sono strumenti non solo per rappresentare, ma anche per passare dalla conoscenza implicita, intuitiva, a quella esplicita, consapevole. Tutto questo, unito alla consapevolezza critica sul contenuto, guida in modo sicuro le scelte dell'insegnante verso esperienze di apprendimento significativo degli allievi."

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

- Fandiño Pinilla M.I., 2005, *Le Frazioni, aspetti concettuali e didattici*, Pitagora, Bologna
- Spirito G., D'Onofrio M., Petrini G., 2002, Il racconto della matematica, Firenze, La Nuova Italia
- Brunetto Piochi, Metacognizione e insegnamento della Matematica in A. Mariani **e** D. Sarsini, Sulla **Metacognizione**. CLUEB, Bologna 2006; pp. 179-201.
- C. Bertinetto, A. Metiainen, J. Paasonen, E. Voutilainen, 2012, Contaci, Bologna, Zanichelli.