

## POLÍGONOS REGULARES DADA LA CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA

### Introducción

La construcción de polígonos regulares inscritos en una circunferencia dada, se basan en la división de dicha circunferencia en un número partes iguales. En ocasiones, el trazado pasa por la obtención de la cuerda correspondiente a cada uno de esos arcos, es decir el lado del polígono, y otras ocasiones pasa por la obtención del ángulo central del polígono correspondiente.

Cuando en una construcción obtenemos el lado del polígono, y hemos de llevarlo sucesivas veces a lo largo de la circunferencia, se aconseja no llevar todos los lados sucesivamente en un solo sentido de la circunferencia, sino, que partiendo de un vértice se lleve la mitad de los lados en una dirección y la otra mitad en sentido contrario, con objeto de minimizar los errores de construcción, inherentes al instrumental o al procedimiento.

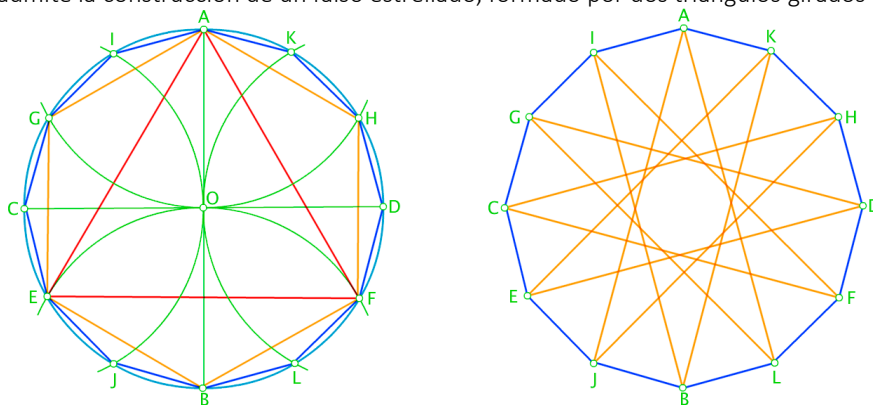
### Triángulo, hexágono y dodecágono (construcción exacta)

Comenzaremos trazando dos diámetros perpendiculares entre sí, que nos determinarán, sobre la circunferencia dada, los puntos A-B y C-D respectivamente.

A continuación, con centro en B y 4 trazaremos dos arcos, de radio igual al de la circunferencia dada, que nos determinarán, sobre ella, los puntos 2, 6, 3 y 5. Por último con centro en B trazaremos un arco del mismo radio, que nos determinará el punto C sobre la circunferencia dada.

Uniendo los puntos 2, 4 y 6, obtendremos el triángulo inscrito. Uniendo los puntos 1, 2, 3, 4, 5 y 6, obtendremos el hexágono inscrito. Y uniendo los puntos 3 y C, obtendremos el lado del dodecágono inscrito; para su total construcción solo tendríamos que llevar este lado, 12 veces sobre la circunferencia.

De los tres polígonos, solo el dodecágono admite la construcción de estrellados, concretamente del estrellado de 5. El hexágono admite la construcción de un falso estrellado, formado por dos triángulos girados entre sí 60°.



**NOTA:** Todas las construcciones de este ejercicio se realizan con una misma abertura del compás, igual al radio de la circunferencia dada.

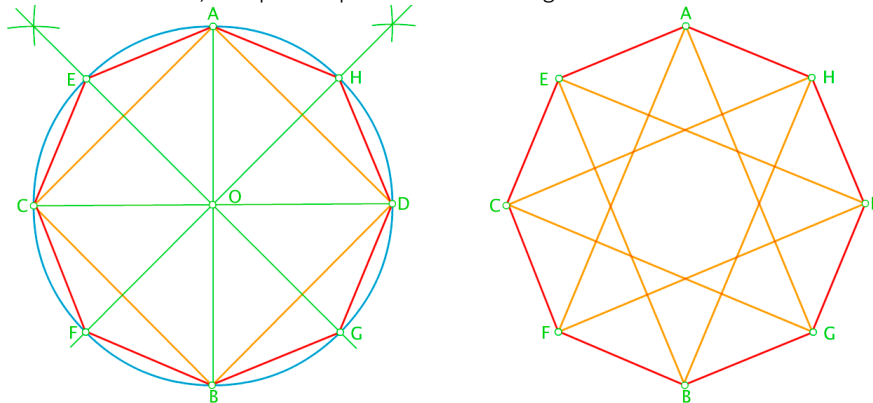
## Cuadrado y octógono (construcción exacta)

Comenzaremos trazando dos diámetros perpendiculares entre sí, que nos determinarán, sobre la circunferencia dada, los puntos A-B y C-D respectivamente.

A continuación, trazaremos las bisectrices de los cuatro ángulos de  $90^\circ$ , formados por las diagonales trazadas, dichas bisectrices nos determinarán sobre la circunferencia los puntos E, F, G y H.

Uniéndolos los puntos A, C, B y D, obtendremos el cuadrado inscrito. Y uniéndolos los puntos A; E, C, F, B, G, D y H, obtendremos el octógono inscrito.

El cuadrado no admite estrellados. El octógono sí, concretamente el estrellado de 3. El octógono también admite la construcción de un falso estrellado, compuesto por dos cuadrados girados entre sí  $45^\circ$ .



**NOTA:** De esta construcción podemos deducir, la forma de construir un polígono de doble número de lados que uno dado. Solo tendremos que trazar las bisectrices de los ángulos centrales del polígono dado, y estas nos determinarán, sobre la circunferencia circunscrita, los vértices necesarios para la construcción.

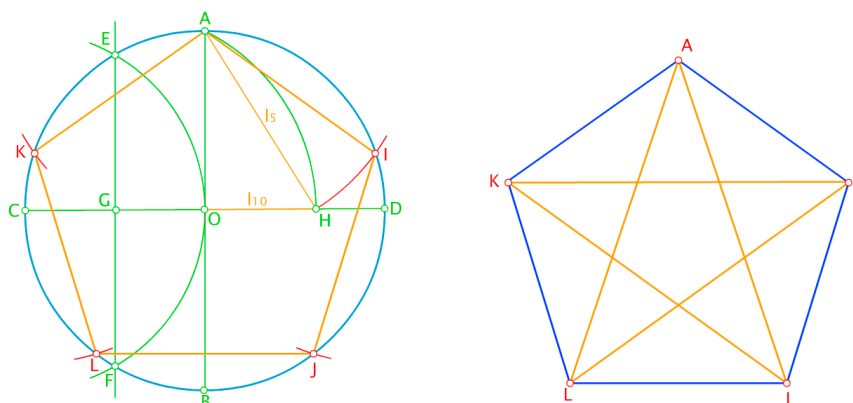
## Pentágono y decágono (construcción exacta)

Comenzaremos trazando dos diámetros perpendiculares entre sí, que nos determinarán sobre la circunferencia dada los puntos A- B y C-D respectivamente. Con el mismo radio de la circunferencia dada trazaremos un arco de centro en C, que nos determinará los puntos E y F sobre la circunferencia, uniéndolos dichos puntos obtendremos el punto G, punto medio del radio O-C.

Con centro en G trazaremos un arco de radio G-A, que determinará el punto H sobre la diagonal C-D. La distancia A-H es el lado de pentágono inscrito, mientras que la distancia O-H es el lado del decágono inscrito.

Para la construcción del pentágono y el decágono, solo resta llevar dichos lados, 5 y 10 veces respectivamente, a lo largo de la circunferencia.

El pentágono tiene estrellado de 2. El decágono tiene estrellado de 3, y un falso estrellado, formado por dos pentágonos estrellados girados entre sí  $36^\circ$ .



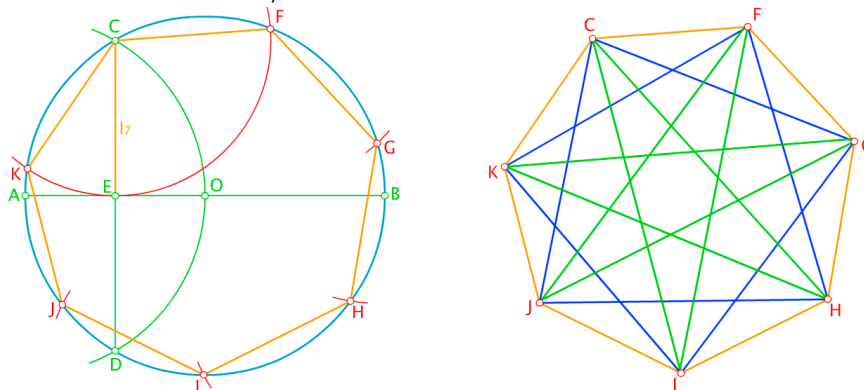
## Heptágono (construcción aproximada)

Comenzaremos trazando una diagonal de la circunferencia dada de centro O, que nos determinará sobre ella puntos A y B.

A continuación, con centro en A, trazaremos el arco de radio A-O, que nos determinará, sobre la circunferencia, los puntos C y D, uniendo dichos puntos obtendremos el punto E, punto medio del radio A-O. En C-E habremos obtenido el lado del heptágono inscrito.

Solo resta llevar dicho lado, 7 veces sobre la circunferencia, para obtener el heptágono buscado. Como se indicaba al principio de este tema, partiendo del punto C, se ha llevado dicho lado, tres veces en cada sentido de la circunferencia, para minimizar los errores de construcción.

El heptágono tiene estrellado de 3 y de 2.



**NOTA:** Como puede apreciarse en la construcción, el lado del heptágono inscrito en una circunferencia, es igual a la mitad del lado del triángulo inscrito.

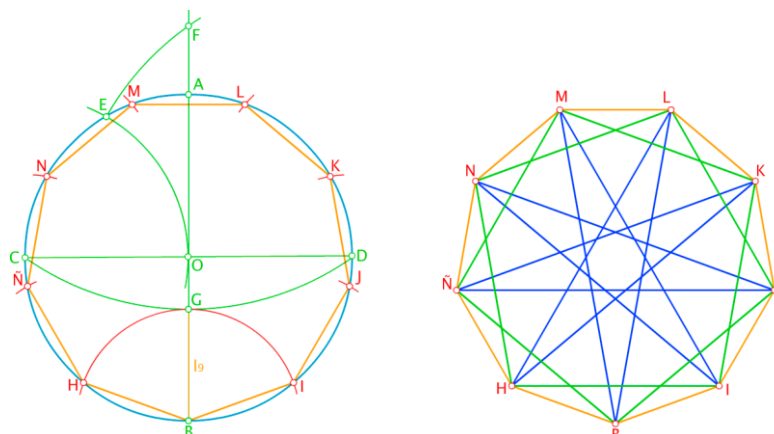
## Eneágono (construcción aproximada)

Comenzaremos trazando dos diámetros perpendiculares, que nos determinarán, sobre la circunferencia dada, los puntos A-B y C-D respectivamente.

Con centro en C, trazaremos un arco de radio C-O, que nos determinará, sobre la circunferencia dada, el punto E. Con centro en D y radio D-E, trazaremos un arco de circunferencia, que nos determinará el punto F, sobre la prolongación de la diagonal A-B. Por último con centro en F y radio F-D=F-C, trazaremos un arco de circunferencia que nos determinará el punto G sobre la diagonal A-B. En G-B habremos obtenido el lado del eneágono inscrito en la circunferencia.

Procediendo como en el caso del heptágono, llevaremos dicho lado, 9 veces sobre la circunferencia, para obtener el eneágono buscado.

El eneágono tiene estrellado de 4 y de 2. También presenta un falso estrellado, formado por 3 triángulos girados entre sí 40°.



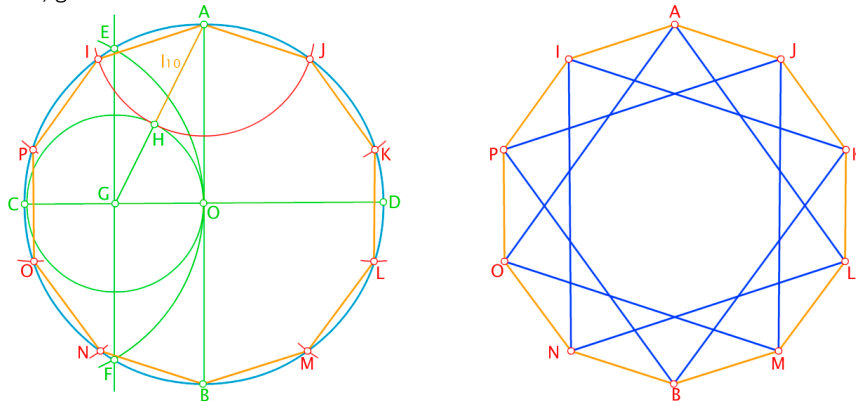
## Decágono (construcción exacta)

Comenzaremos trazando dos diámetros perpendiculares, que nos determinarán, sobre la circunferencia dada, los puntos A-B y C-D respectivamente.

Con centro C, y radio C-O, trazaremos un arco que nos determinará los puntos E y E sobre la circunferencia, uniendo dichos puntos, obtendremos el punto G, punto medio del radio C-O. A continuación trazaremos la circunferencia de centro en G y radio G-O. Trazamos la recta G-A, la cual intercepta a la circunferencia anterior en el punto H, siendo la distancia A-H, el lado del decágono inscrito.

Llevaremos dicho lado, 10 veces sobre la circunferencia, para obtener el decágono buscado.

El decágono, como se indicó anteriormente, presenta estrellado de 3, y un falso estrellado, formado por dos pentágonos estrellados, girados entre sí  $36^\circ$ .



## Pentadecágono (construcción exacta)

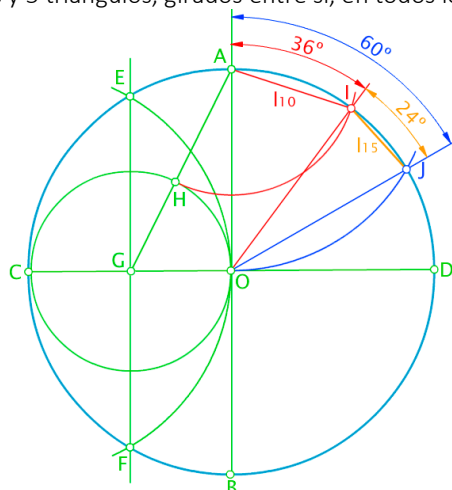
Esta construcción se basa en la obtención del ángulo de  $24^\circ$ , correspondiente al ángulo interior del pentadecágono. Dicho ángulo lo obtendremos por diferencia del ángulo de  $60^\circ$ , ángulo interior del hexágono inscrito, y el ángulo de  $36^\circ$ , ángulo interior del decágono inscrito.

Comenzaremos con las construcciones necesarias para la obtención del lado del decágono (las del ejercicio anterior), hasta la obtención del punto H de la figura.

A continuación, con centro en C trazaremos un arco de radio C-H, que nos determinará sobre la circunferencia el punto 1. De nuevo con centro en C, trazaremos un arco de radio C-O, que nos determinará el punto 2 sobre la circunferencia.

Como puede apreciarse en la figura, el ángulo AOI corresponde al ángulo interior del decágono, de  $36^\circ$ , y el ángulo AOJ corresponde al ángulo interior del hexágono, de  $60^\circ$ , luego de su diferencia obtendremos el ángulo IOJ de  $24^\circ$ , ángulo interior del pentadecágono buscado, siendo el segmento I-J el lado del polígono. Solo resta llevar, por el procedimiento ya explicado, dicho lado, 15 veces sobre la circunferencia dada.

El pentadecágono presenta estrellado de 7 y de 2, y un falso estrellado, compuesto por: tres pentágonos convexos, tres pentágonos estrellados y 5 triángulos, girados entre sí, en todos los casos,  $24^\circ$ .



## Procedimiento general (construcción aproximada)

Este procedimiento se utilizará solo cuando el polígono buscado no tenga una construcción particular, ni pueda obtenerse como múltiplo de otro, dado que este procedimiento lleva inherente una gran imprecisión.

Comenzaremos con el trazado del diámetro A-B, que dividiremos, mediante el Teorema de Tales en tantas partes iguales como lados tenga el polígono que deseamos trazar, en nuestro caso 11. Para ello trazaremos desde B una recta  $r$  cualquiera, sobre la que llevaremos 11 divisiones iguales. Uniremos la última división  $11'$ , con A, y por el resto de divisiones trazaremos paralelas a esta, obteniendo de esta forma, la división de la diagonal A-B en 11 partes iguales.

Con centro en A y B trazaremos dos arcos de radio A-B, los cuales se interceptarán en los puntos C y D. Uniendo dichos puntos con las divisiones alternadas del diámetro A-B, obtendremos sobre la circunferencia, los puntos P, Q, R, .. etc., vértices del polígono. Igualmente se procedería con el punto D, uniéndolo con los puntos 2, 4, etc., y obteniendo así el resto de los vértices del polígono.

Solo restaría unir dichos puntos para obtener el polígono buscado.

