平成１１年度　学位論文

特殊関数とその応用について

兵庫教育大学大学院　学校教育研究科
教科・領域教育専攻　自然系コース
Ｍ９８５５４Ｇ　國政　弘行

はじめに

２階線形偏微分方程式を変数分離法を用いて，２階常微分方程式に置き換え，その常微分方程式の解の中で初等関数で表せない解が特殊関数と呼ばれる．本論文では，特殊関数を解にもつベッセル (Bessel) の微分方程式とルジャンドル (Legendre) の微分方程式をあつかい，それぞれの微分方程式の解をベッセル関数，ルジャンドル関数と呼んでそれらの解の性質を調べた．これらの特殊関数は，物理学・工学の理論的研究に欠くことのできない道具であり，自然科学への理論的応用について考察を深めた．

第１章ではベッセル関数について述べた. ベッセル関数は，惑星の運動を解析的に表現しようとするベッセルの研究にはじめて現れた関数である. ここでは，主に級数解と解の積分表示について調べ，関数の漸化式，直交性，漸近展開等について述べた．特にベッセルの漸近展開については，ハンケル (Hankel) 関数の性質を用いて示した．

第２章ではルジャンドル関数について述べた. ラプラス (Laplace) の方程式 $\Delta V = 0$ の解で，直交座標 (x, y, z) において n 次の同次多項式で与えられるものを体球関数と呼び，これを極座標 (r, θ, φ) で表すと $r^n f_n(\theta, \varphi)$ となる. この $f_n(\theta, \varphi)$ を n 次の球面関数と言い，$f_n(\theta, \varphi)$ の満たす微分方程式の変数を分離し，$z = \cos\theta$ とおくと，z に関してルジャンドル陪関数の微分方程式を得る．特に，θ と φ の分離定数を 0 とし，n を複素数 ν におきかえた微分方程式をルジャンドルの微分方程式という. 一般にこの微分方程式の解を，ルジャンドル関数と呼び，ここでは一次独立な二つの解 $P_\nu(z)$, $Q_\nu(z)$ の性質について述べた．

第３章ではフーリェ(Fourier) 級数展開，ルジャンドル多項式による展開，フーリェ・ベッセル (Fourier・Bessel) 級数展開の完全性について関数解析の立場から述べた．

第４章ではポテンシャルについて述べた. ポテンシャル関数 V は，物質の密度分布 $\rho(x, y, z)$ が与えられたとき，線形非同次の二階偏微分方程式 $\Delta V = 4\pi G\rho$（G : 重力定数）に支配される. これをポアッソン (Poisson) の方程式と呼ぶ. 質量のない空間では，密度 $\rho = 0$ であるからポテンシャル関数 V は，同次線形方程式のラプラスの方程式 $\Delta V = 0$ を満足する. これらの偏微分方程式を球座標や円柱座標に変換し，変数分離法を用いて解くうえでルジャンドル陪関数の微分方程式があらわれてくるのである．

第５章では熱伝導について述べた．時刻 t，点 (x, y, z) での温度を $T(x, y, z, t)$ とすると，T は方程式 $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \kappa\Delta T$（$\kappa$：温度伝導度係数）に支配される. これは熱伝導方程式と呼ばる. 定常状態では $\partial T/\partial t = 0$ より，ラプラスの方程式 $\Delta T = 0$ に支配される. ポテンシャルと同様で変数変換し変数分離法を用いて解くうえでベッセルの微分方程式があらわれてくる. 特に球内部の熱伝導においては，ベッセルとルジャンドル陪関数の微分方程式があらわれてくる．

付録Aでは主にベータ関数とガンマ関数の基本的な性質をまとめて補った．

最後に，本論文作成にあたり，渡辺金治教授に読みづらい原稿を読んで頂き貴重な教示を頂いたことに深く感謝の意をあらわしここに記する．

目 次

第 1 章　ベッセル関数 **1**
1.1　ベッセルの微分方程式と解 1
1.2　ベッセル関数の積分表示 5
1.3　ハンケルの公式 7
1.4　ベッセル関数の漸化式 9
1.5　２階常微分方程式の性質 10
1.6　ベッセル関数の零点 13
1.7　ベッセル関数の直交性 15
1.8　ハンケル関数と変形ベッセル関数 17
1.9　ベッセル関数のロンスキアン 19
1.10　８字形積分路での複素積分表示 21
1.11　U字形積分路での複素積分表示 25
1.12　ハンケル関数の複素積分表示 27
1.13　鞍点法 28
1.14　ベッセル関数の漸近展開 31

第 2 章　ルジャンドル関数 **37**
2.1　ルジャンドル多項式 37
2.2　ルジャンドルの微分方程式 41
2.3　ルジャンドル多項式の直交性 43
2.4　第一種ルジャンドル関数 45
2.5　第一種ルジャンドル関数の積分表示 48
2.6　第二種ルジャンドル関数 50
2.7　$|z| < 1$ での第二種ルジャンドル関数 53
2.8　ロンスキアンと漸化式 59
2.9　ルジャンドル陪関数と漸化式 63
2.10　ルジャンドル陪関数の漸近形 66
2.11　ν についての $P_\nu(\cos\theta) = 0$ の解 67

第 3 章　完全直交系について **70**
3.1　$L^p(\Omega)$ 70
3.2　ヒルベルト空間 74
3.3　射影定理・正規直交系 76
3.4　完全性 81

3.5 シュミットの直交化 83
3.6 フーリェ・ベッセル展開 85

第 4 章 ポテンシャル論 **90**
4.1 ポテンシャルの概念 90
4.2 ラプラスとポアッソンの方程式 90
4.3 球座標によるラプラス方程式の一般解 93
4.4 球面調和関数 96
4.5 球座標による円環のポテンシャル 98
4.6 球座標による薄い円板のポテンシャル 100
4.7 両曲面のポテンシャルの関係 100
4.8 薄い球殻のポテンシャル 101
4.9 ルジャンドル多項式の加法定理 103
4.10 円柱座標による薄い円板のポテンシャル 106

第 5 章 熱伝導論 **110**
5.1 熱伝導の基礎方程式 110
5.2 境界での熱の輻射 111
5.3 無限円柱内の定常状態 112
5.4 無限円柱での一般解 113
5.5 境界条件が与えられたとき 114
5.6 絶縁体でおおわれた円柱内の熱伝導 115
5.7 中空円柱内の熱の流れ 116
5.8 表面で一定の熱流束がある場合 118
5.9 円柱表面の温度が z の関数のとき 121
5.10 無限媒質中に熱源があるとき 124
5.11 球内部の熱伝導 126

付 録 A **129**
A.1 対数関数とベキ関数 129
A.2 ガンマ関数とベータ関数の関係 130
A.3 ガンマ関数の無限乗積表現 134
A.4 ガンマ関数の乗法公式 137
A.5 ガンマ関数のハンケル表示 139

第1章　ベッセル関数

ここではベッセルの微分方程式とその解の性質についてまとめた．ベッセルの微分方程式の解をベッセル関数と呼ぶが，ベッセル関数の級数表示，積分表示について詳しく述べた．また，ベッセル関数の漸近展開についてもふれた．尚，対数関数とベキ関数の定義については付録 A で述べた．

1.1　ベッセルの微分方程式と解

複素数 z を変数とする微分方程式

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{df}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) f = 0 \qquad \nu : \text{複素定数} \tag{1.1}$$

を **ベッセル (Bessel) の微分方程式** という．また, その解を一般にベッセル関数という．

$z = 0$ のまわりの級数解を得るために

$$f(z) = z^\alpha \sum_{m=0}^{\infty} a_m \, z^m \qquad a_0 \neq 0$$

と仮定して係数 $a_0, a_1, \ldots$ と指数 α を係数比較によって求める．ベッセルの微分方程式に代入して

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Big\{ (\alpha+m)(\alpha+m-1) + (\alpha+m) - \nu^2 \Big\} a_m \, z^{\alpha+m-2} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m \, z^{\alpha+m} = 0$$

となる．この方程式が成り立つには z の各べき係数が 0 とならなくてはならない．最低次の $z^{\alpha-2}$ の係数から指数決定式 $\alpha^2 - \nu^2 = 0$ が導かれ，　$\alpha = \pm\nu$ を得る．次に $z^{\alpha-1}$ の係数を考えると $a_1 = 0$ を得る．そして, 一般のべき $z^{\alpha+m}$ の係数を 0 とおけば漸化式

$$\{(\alpha+m)^2 - \nu^2\} a_m + a_{m-2} = 0$$

を得る．これより $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$ となる．いま，　$\alpha = \nu$ をとり m を $2m$ におきかえて考え，ガンマ関数 $\Gamma(z)$ を用いると

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m \Gamma(\nu+1) \, a_0}{2^{2m} m! \, \Gamma(m+\nu+1)}$$

を得る．したがって，　$a_0 = \{2^\nu \Gamma(\nu+1)\}^{-1}$ をえらべば

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} m! \, \Gamma(m+\nu+1)}$$

となり, 求める級数解は

$$f(z) = J_\nu(z) \equiv \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \tag{1.2}$$

となる．これを ν **次の第一種ベッセル関数**とよぶ．z のべき級数 $(z/2)^{-\nu}J_\nu(z)$ を考えて，級数の収束半径をダランベール (D'Alembert) の判定法から求めると無限大となる．指数決定式のもう一つの根 $\alpha = -\nu$ に対する解は $J_\nu(z)$ で ν のかわりに $-\nu$ とおいたものに等しく, それを $J_{-\nu}(z)$ と表す．ν が正整数でないとき $J_\nu(z)$ と $J_{-\nu}(z)$ は 1 次独立で, ベッセル微分方程式の基本解である．

例として，$\nu = \pm 1/2$ のときにはベッセル関数は初等関数をもちいて表すことができる．

$$\begin{aligned} J_{1/2}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+1/2+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{1/2+2m} \\ &= \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots\right) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}}\,\frac{\sin z}{z} \qquad (1.3) \\ J_{-1/2}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{\cos z}{z} \qquad (1.4) \end{aligned}$$

と表される．

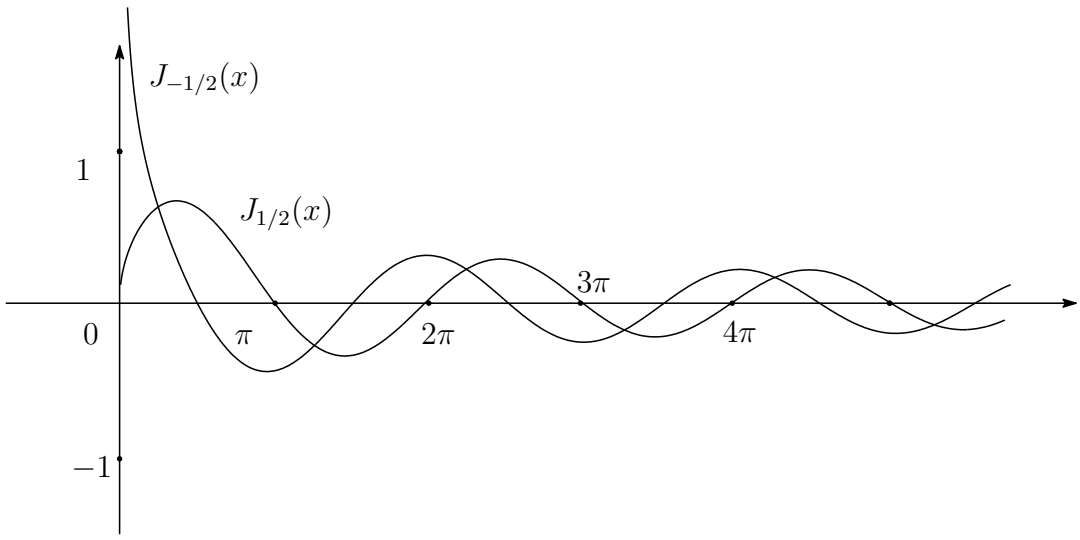

図 1.1:

しかし，　ν が正整数 n に等しいとき $J_n(z)$ と $J_{-n}(z)$ は互いに一次独立でない．なぜなら

$$\lim_{\nu\to -n} \frac{1}{\Gamma(\nu+m+1)} = 0 \qquad -n+m+1 \le 0$$

であるから

$$J_{-n}(z) = \lim_{\nu\to -n} J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m-n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

$$= \Big(\frac{z}{2}\Big)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2k}$$

を得る．よって

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \qquad n : \text{整数}$$

となり一次独立ではない．

νが整数でないときベッセルの微分方程式の二つの独立な解は $J_\nu(z)$ と $J_{-\nu}(z)$ であってこれらを基本解としてとることができるが，　ν が整数のとき $J_n(z)$ と $J_{-n}(z)$ は互いに一次独立ではないので，　$J_n(z)$ のほかに独立な解を求めなくてはならない．そのために

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} \qquad (\nu \neq \text{整数}) \tag{1.5}$$

で定義される関数 $Y_\nu(z)$ はベッセル微分方程式の解であり，$J_\nu(z)$ とは一次独立である．この関数 $Y_\nu(z)$ を **第二種ベッセル関数** とよぶ．または ν 次の **ノイマン (Neumann)** 関数とも呼ばれる．

ν が正の整数 n のとき (1.5) は不定形をなすから，$\nu \to n$ の極限値によって定義する．すなわち

$$Y_n(z) = \lim_{\nu\to n} \frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} \tag{1.6}$$

によって $Y_n(z)$ を定義すれば, ベッセル微分方程式の解であり，　$Y_n(z)$ と $J_n(z)$ は一次独立である．この関数の級数による表現を定義式 (1.6) にしたがって求めてみる．それぞれ ν について微分したのちに極限操作をすると

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= \frac{1}{\pi\cos n\pi}\Big\{-\pi\sin n\pi\ J_n(z) + \cos n\pi \big[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}\big]_{\nu=n} - \big[\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\big]_{\nu=n}\Big\} \\ &= \frac{1}{\pi}\big[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}\big]_{\nu=n} - \frac{(-1)^n}{\pi}\big[\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\big]_{\nu=n} \end{aligned} \tag{1.7}$$

となる．第一項を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu} &= \big(\frac{z}{2}\big)^\nu \log\frac{z}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)} \big(\frac{z}{2}\big)^{2m} \\ &\qquad + \big(\frac{z}{2}\big)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \Big[\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{\Gamma(\nu+m+1)}\Big] \big(\frac{z}{2}\big)^{2m} \end{aligned}$$

となる．ここで, プサイ関数（付録A (1.21) 参照）

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + z\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+z)}\ , \qquad \gamma\ :\ \text{オイラー数 (Euler)}$$

を用いて

$$\big[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}\big]_{\nu=n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(n+m+1)} \Big\{\log\frac{z}{2} - \psi(n+m+1)\Big\} \big(\frac{z}{2}\big)^{n+2m}$$

となる．次に (1.7) の第二項について，　$\nu < n$ であるとき

$$J_{-\nu}(z) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(-\nu+m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2m} + \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(-\nu+m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2m}$$

と分けて表す．右辺の後半の項の ν についての微分は先と同様にできるが, 前半の項についてはそのまま微分すると不定形が得られるので, ガンマ関数の公式（付録A (1.27) 参照）

$$\frac{1}{\Gamma(-\nu+m+1)} = \frac{\Gamma(\nu-m)\ \sin(\nu-m)\pi}{\pi}$$

を用いて，　$0 \le m < n$ であれば

$$\begin{aligned}
&\Big[\frac{\partial}{\partial\nu}\Big\{\Big(\frac{z}{2}\Big)^{-\nu+2m}\frac{\Gamma(\nu-m)\sin(\nu-m)\pi}{\pi}\Big\}\Big]_{\nu=n} \\
&= \frac{1}{\pi}\Big[\Big(\frac{z}{2}\Big)^{-\nu+2m}\Gamma(\nu-m)\big\{\psi(\nu-m)\sin(\nu-m)\pi \\
&\qquad\qquad + \pi\cos(\nu-m)\pi - \log\frac{z}{2}\sin(\nu-m)\pi\big\}\Big]_{\nu=n} \\
&= \Big(\frac{z}{2}\Big)^{-n+2m}\Gamma(n-m)\cos(n-m)\pi
\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}
\Big[\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\Big]_{\nu=n} &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m(-1)^{n-m}\Gamma(n-m)}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m} \\
&\qquad + \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(m-n)!}\Big\{-\log\frac{z}{2} + \psi(m-n+1)\Big\}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{-n+2m} \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^n\Gamma(n-m)}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m} \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)!\,k!}\Big\{-\log\frac{z}{2} + \psi(k+1)\Big\}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{n+2k}
\end{aligned}$$

を得る．これらの結果より，非負整数 n に対し

$$\begin{aligned}
Y_n(z) = \frac{2}{\pi}J_n(z)\log\frac{z}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m} \\
- \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\psi(m+1)+\psi(n+m+1)}{m!\,(n+m)!}(-1)^m\Big(\frac{z}{2}\Big)^{n+2m}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

を得る．これが第二種ベッセル関数 $Y_n(z)$ の級数表示である．

(1.5) において $\nu = \pm 1/2$ とすると

$$Y_{1/2}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z \qquad Y_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z \tag{1.9}$$

を得る．

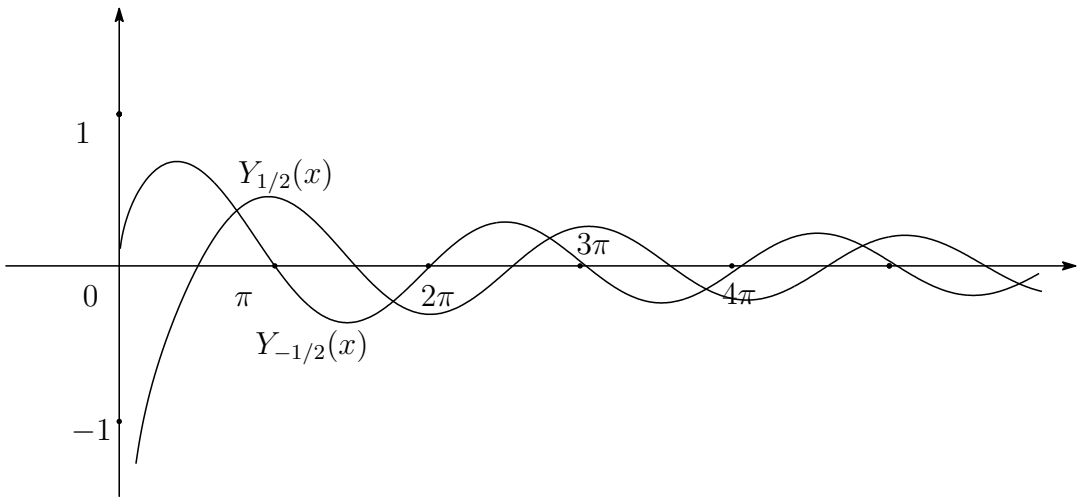

図 1.2:

1.2 ベッセル関数の積分表示

ν が非負整数 n のとき次の命題が成り立つ.

命題 1.1 第一種ベッセル関数 $J_n(z)$ は

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\cos t}\, e^{in(t-\pi/2)}\, dt \qquad n : \text{非負整数} \tag{1.10}$$

と表すことができる．これを **ハンセ** Hanse **の積分表示** という.

証明： 定積分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\cos t} e^{in(t-\pi/2)}\, dt \qquad n : \text{非負整数} \tag{1.11}$$

を考える．指数関数の展開公式と二項展開を用いると

$$e^{iz\cos t} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(iz\cos t)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(iz)^m}{m!}\Big(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\Big)^m = \sum_{m=0}^{\infty}\big(\frac{1}{2}\big)^m\frac{(iz)^m}{m!}\sum_{r=0}^{m}{}_mC_r\; e^{irt}e^{-i(m-r)t}$$

となるから

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\big(\frac{1}{2}\big)^m\frac{(iz)^m}{m!}\sum_{r=0}^{m}{}_mC_r\int_{-\pi}^{\pi} e^{in(t-\pi/2)}\; e^{irt}\; e^{-i(m-r)t}\, dt$$

となる．ここで

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(n+r-m+r)}\, dt = \begin{cases} 0 & n+2r-m \neq 0 \\ 2\pi & n+2r-m = 0 \end{cases}$$

となり，r に関する総和の中で $r=(m-n)/2$ の項のみが残り他の項はすべて 0 になるので

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2}\Big)^m\frac{(iz)^m}{m!}\ e^{-in\pi/2}\ {}_mC_{(m-n)/2}$$

となる．$(m-n)/2=p$ とおけば

$${}_mC_{(m-n)/2}={}_{2p+n}C_p=\frac{(2p+n)!}{p!\ (p+n)!}$$

より

$$f(z)=\sum_{p=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2p+n}\frac{(i)^{2p}}{(2p+n)!}\ \frac{(2p+n)!}{p!\ (p+n)!}=\Big(\frac{z}{2}\Big)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\ (m+n)!}\ \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2m}$$

を得る．第一種ベッセル関数の定義 (1.2) から $f(z)\ =\ J_n(z)$ を得る． **（証明終わり）**

命題 1.1 の類似積分によってもベッセル関数を表すことができる．

命題 1.2 ベッセル関数 $J_\nu(z)$ は

$$J_\nu(z)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1/2)\ \Gamma(1/2)}\Big(\frac{z}{2}\Big)^\nu\int_0^1 t^{\nu-1/2}\ (1-t)^{-1/2}\ \cos[z(1-t)^{1/2}]\ dt$$

$$\mathrm{Re}(\nu+1/2)>0 \quad (1.12)$$

と表すことができる．

証明： ベッセル関数の級数表示 (1.2) の一般項について，$\nu+1/2>0$ のとき

$$\begin{aligned}\Big(\frac{z}{2}\Big)^\nu\frac{(-1)^m}{m!\ \Gamma(\nu+m+1)}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2m}&=\Big(\frac{z}{2}\Big)^\nu\frac{(-1)^m}{\Gamma(\nu+m+1)}\ \frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(1/2)\ \Gamma(2m+1)}\ z^{2m}\\&=\Big(\frac{z}{2}\Big)^\nu\frac{(-1)^m}{\Gamma(\nu+1/2)\ \Gamma(1/2)}\ \frac{z^{2m}}{(2m)!}\ B(\nu+1/2,m+1/2)\\&=\Big(\frac{z}{2}\Big)^\nu\frac{(-1)^m}{\Gamma(\nu+1/2)\ \Gamma(1/2)}\ \frac{z^{2m}}{(2m)!}\int_0^1 t^{\nu-1/2}(1-t)^{m-1/2}\ dt\end{aligned}$$

となる．ここで無限級数

$$\sum_{m=0}^{\infty}t^{\nu-1/2}\frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!}\ (1-t)^{m-1/2}$$

は，ルベーグ (Lebesgue) の収束定理から，級数の和を $(0,1)$ で積分した値と, 各項を $(0,1)$ で積分し和をとったものは等しい．したがって, ベッセル関数 $J_\nu(z)$ は

$$J_\nu(z)=\Big(\frac{z}{2}\Big)^\nu\frac{1}{\Gamma(\nu+1/2)\ \Gamma(1/2)}\int_0^1\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\ z^{2m}\ t^{\nu-1/2}\ (1-t)^{m-1/2}\ dt$$

$$\mathrm{Re}(\nu+1/2)>0$$

となる．積分記号内の級数について

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!}\, z^{2m}\, (1-t)^{m-1/2} = (1-t)^{-1/2}\ \cos[z(1-t)^{1/2}]$$

となるから

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma(1/2)} \Big(\frac{z}{2}\Big)^\nu \int_0^1 t^{\nu-1/2}\,(1-t)^{-1/2}\ \cos[z(1-t)^{1/2}]\,dt$$

$$\mathrm{Re}(\nu+1/2) > 0$$

を得る． **（証明終わり）**

ここで $t = \sin^2\theta$ と変数変換すると

$$J_\nu(z) = \frac{2}{\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma(1/2)} \Big(\frac{z}{2}\Big)^\nu \int_0^{\pi/2} \cos(z\cos\theta)\ \sin^{2\nu}\theta\,d\theta, \quad \mathrm{Re}(\nu+1/2) > 0 \tag{1.13}$$

となる．これを **ポアッソン (Poisson) の積分表示** とよぶ．また,$1-t=\xi^2$ と変数変換すると

$$\int_0^1 t^{\nu-1/2}\,(1-t)^{-1/2}\ \cos[z(1-t)^{1/2}]\,dt = 2\int_0^1 (1-\xi^2)^{\nu-1/2}\ \cos(z\xi)\,d\xi$$

より

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma(1/2)} \Big(\frac{z}{2}\Big)^\nu \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{\nu-1/2}\,e^{iz\xi}\,d\xi, \quad \mathrm{Re}(\nu+1/2) > 0 \tag{1.14}$$

を得る．

1.3 ハンケルの公式

ベッセルの積分表示の (1.11) を用いてハンケルの公式を導くことができる．ある与えられた関数 $f(x,y)$ は x,y の連続で有界変動な関数とし, すべての x,y に対して積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x,y)\big|\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x,y)\big|\,dy$$

が存在するとする．このとき， y をパラメータとみなして $f(x,y)$ をフーリェ積分で表せば

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,y)\,e^{i\omega(x-\xi)}\,d\xi\,d\omega$$

となる．次に ξ をパラメータとみなしてフーリェ積分で表せば

$$f(\xi,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)\,e^{i\omega'(y-\eta)}\,d\eta\,d\omega'$$

である.（ラプラス変換とフーリェ解析要論 (p83)：田代嘉宏著：森北出版参照）したがって

$$f(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iiiint_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)\ e^{i\omega(x-\xi)+i\omega'(y-\eta)}\ d\omega\ d\omega'\ d\xi\ d\eta$$

を得る．ここで座標変換

$$\begin{aligned} x&=r\cos\phi, & \xi&=\rho\cos\psi, & \omega&=\sigma\cos\alpha \\ y&=r\sin\phi, & \eta&=\rho\sin\psi, & \omega'&=\sigma\sin\alpha \end{aligned}$$

によって極座標にうつすと

$$\omega x+\omega' y=\sigma r\ \cos(\alpha-\phi),\qquad \omega\xi+\omega'\eta=\sigma\rho\ \cos(\psi-\alpha)$$

となる．この変換のヤコビアンは

$$d\xi\ d\eta=\rho\ d\rho\ d\psi,\qquad d\omega\ d\omega'=\sigma\ d\sigma\ d\alpha$$

であるから，　$f(x,y)=g(r)e^{in\phi}$　n : 正整数 のとき

$$\begin{aligned} g(r)e^{in\phi}&=\frac{1}{(2\pi)^2}\iiiint_{-\infty}^{\infty} f(\rho\cos\psi,\rho\cos\psi)\ e^{i\sigma r\cos(\alpha-\phi)-i\sigma\rho\cos(\psi-\alpha)}\ \rho\ \sigma\ d\rho\ d\psi\ d\sigma\ d\alpha \\ &=\int_0^\infty \sigma\ d\sigma\int_0^\infty g(\rho)\ \rho\ d\rho\ \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\sigma r\cos(\alpha-\phi)}\ d\alpha\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\psi}\ e^{-i\sigma\rho\cos(\psi-\alpha)}\ d\psi\right\} \\ &\quad(\psi-\alpha=t\text{ とおくと}) \\ &=\int_0^\infty \sigma\ d\sigma\int_0^\infty g(\rho)\ \rho\ d\rho \\ &\qquad\times\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\sigma r\cos(\alpha-\phi)}\ d\alpha\ e^{in\pi/2}\ e^{in\alpha}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(-\sigma\rho)\cos t}\ e^{in(t-\pi/2)}\ dt\right)\right\} \\ &=\int_0^\infty \sigma\ d\sigma\int_0^\infty g(\rho)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\sigma r\cos(\alpha-\phi)}\ d\alpha\ e^{in\alpha}\ e^{in\pi/2}\ (-1)^n J_n(\sigma\rho)\right\}\ \rho\ d\rho \\ &=\int_0^\infty \sigma\ d\sigma\int_0^\infty g(\rho)\left(e^{in\pi/2}\ e^{in\phi}\ J_n(\sigma r)\ e^{in\pi/2}\ (-1)^n J_n(\sigma\rho)\right)\ \rho\ d\rho \\ &=e^{in\phi}\int_0^\infty \sigma\ d\sigma\int_0^\infty g(\rho)\ J_n(\sigma r)\ J_n(\sigma\rho)\ \rho\ d\rho \end{aligned}$$

となる．ゆえに **ハンケルの公式**

$$g(r)=\int_0^\infty \sigma\ d\sigma\int_0^\infty g(\rho)\ J_n(\sigma r)\ J_n(\sigma\rho)\ \rho\ d\rho \tag{1.15}$$

を得る．またこの関係は

$$\begin{cases} g(r) &=\displaystyle\int_0^\infty h(\sigma)\ J_n(\sigma r)\ \sigma\ d\sigma \\ h(\sigma) &=\displaystyle\int_0^\infty g(\rho)\ J_n(\sigma\rho)\ \rho\ d\rho \end{cases} \tag{1.16}$$

と書くことができ，　$h(\sigma)$ を $g(r)$ のハンケル変換とよぶ．n を正整数としたが，一般には n を ν に換えて $\mathrm{Re}(\nu)\ >\ -1$ において成り立つことが知られている．

1.4 ベッセル関数の漸化式

命題 1.3 次の漸化式が成り立つ.

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}\, J_\nu(z) \tag{1.17}$$

証明： ベッセル関数の定義 (1.2) から

$$\begin{aligned}
J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m)} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{\nu+2m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+2)} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{\nu+2m+1} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{\nu-1} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \Big\{ \frac{1}{m!\,\Gamma(\nu+m)} - \frac{1}{(m-1)!\,\Gamma(\nu+m+1)} \Big\} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{\nu+2m-1} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{\nu-1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{\nu+2m-1} \\
&= \frac{2\nu}{z} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{\nu+2m} = \frac{2\nu}{z}\, J_\nu(z)
\end{aligned}$$

となるから

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}\, J_\nu(z)$$

を得る. **（証明終わり）**

命題 1.4 次の漸化式が成り立つ.

$$J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J_\nu{}'(z) \tag{1.18}$$

証明： $J_\nu(z)$ の z についての微分係数を考えると

$$\begin{aligned}
\frac{dJ_\nu(z)}{dz} &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m(\nu+2m)}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2m+\nu-1} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m)} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2m+\nu-1} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m-1)!\,\Gamma(\nu+m+1)} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2m+\nu-1} \\
&= \frac{1}{2} J_{\nu-1}(z) - \frac{1}{2} J_{\nu+1}(z)
\end{aligned}$$

となるから

$$J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J_\nu{}'(z)$$

を得る. **（証明終わり）**

(1.17), (1.18) を組み合わせて関係式

$$\begin{cases} zJ_\nu{}'(z) + \nu J_\nu(z) &= zJ_{\nu-1}(z) \\ zJ_\nu{}'(z) - \nu J_\nu(z) &= -zJ_{\nu+1}(z) \end{cases} \tag{1.19}$$

を得る.

命題 1.5 次の漸化式が成り立つ.

$$Y_{\nu-1}(z) + Y_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}\, Y_\nu(z) \tag{1.20}$$

証明：第二種ベッセル関数の定義から

$$\begin{aligned} &Y_{\nu-1}(z) + Y_{\nu+1}(z) \\ &\quad= \frac{J_{\nu-1}(z)\ \cos(\nu-1)\pi - J_{-\nu+1}(z)}{\sin(\nu-1)\pi} + \frac{J_{\nu+1}(z)\ \cos(\nu+1)\pi - J_{-\nu-1}(z)}{\sin(\nu+1)\pi} \\ &\quad= \frac{1}{\sin\nu\pi}\Big[\Big\{J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z)\Big\}\cos\nu\pi + J_{-\nu+1}(z) + J_{-\nu-1}(z)\Big] \\ &\quad= \frac{1}{\sin\nu\pi}\Big[\frac{2\nu}{z}\Big\{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)\Big\}\Big] = \frac{2\nu}{z}\, Y_\nu(z) \end{aligned}$$

となるから

$$Y_{\nu-1}(z) + Y_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}\, Y_\nu(z)$$

を得る. **（証明終わり）**

第一種ベッセル関数の場合と同様にすると漸化式

$$\begin{cases} Y_{\nu-1}(z) - Y_{\nu+1}(z) = 2Y_\nu{}'(z) \\ zY_\nu{}'(z) + \nu Y_\nu(z) = zY_{\nu-1}(z) \\ zY_\nu{}'(z) - \nu Y_\nu(z) = -zY_{\nu+1}(z) \end{cases} \tag{1.21}$$

を得る.

1.5 2階常微分方程式の性質

2階の線形常微分方程式は

$$\frac{d^2u}{dz^2} + p(z)\frac{du}{dz} + q(z)u = 0 \tag{1.22}$$

と表すことができる．ここで

$$u(z) = U(z)\exp\Big\{-\frac{1}{2}\int p(z)dz\Big\}$$

とおくと２階微分方程式の標準形

$$\frac{d^2U}{dz^2} + G(z)\,U = 0 \tag{1.23}$$

$$\text{但し}\quad G(z) = q(z) - \frac{1}{2}\,\frac{dp}{dz} - \frac{1}{4}\,p^2(z)$$

を得る．(1.23) の U とは別の解を V とし (1.22) の V に対応する解を v とする．このとき $U,\ V$ の満たす微分方程式より

$$\frac{d^2U}{dz^2}V - U\frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

を得る．両辺を積分すると

$$V\,\frac{dU}{dz} - U\,\frac{dV}{dz} = c \quad (\text{定数}) \tag{1.24}$$

となる．左辺を関数 $U,\ V$ のロンスキー (Wronsky) 行列式，または単にロンスキアンとよぶ．もし　$U,\ V$ が互いに１次独立であればロンスキアンは 0 ではない．なぜなら，$c = 0$ とすると再び積分して

$$U(z) = c^{'}V(z) \qquad (c^{'}:\text{定数})$$

を導き, これは $U,\ V$ が１次独立でないことを示す．いま，　(1.24) の一つの解 $U(z)$ が求められたとすると

$$U^2\,\frac{d}{dz}\Big(\frac{V}{U}\Big) = c$$

となるから積分すると

$$\frac{V}{U} = c\int\frac{dz}{U^2(z)} + k \qquad (k:\text{積分定数})$$

を得る．これより, １次独立な解 U, V のあいだには関係式

$$V = cU\int U^{-2}\,dz + k\,U \qquad c \neq 0$$

が成り立つ．もとの u, v にもどせば関係式は

$$v(z) = c\,u(z)\int u^{-2}(z)\ \exp[-\int p(z)dz]\,dz + k\,u(z)$$

となる．

次にスツルム (Sturm) の比較定理を証明する.

定理 1.1 (スツルム (Sturm) の比較定理) 実変数 x の実数値関数 u, v はそれぞれ微分方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2} + h(x)u = 0, \qquad \frac{d^2v}{dx^2} + g(x)v = 0 \tag{1.25}$$

の解である．そして $h(x), g(x)$ は x の連続関数であるとする．また，解 $u(x)$ の隣り合う零点を $x = a, x = b$ とし $a \leq x \leq b$ では $g(x) \geq h(x)$ とする．このとき $[a, b]$ には他の解 $v(x)$ の零点が少なくとも一つ存在する．特に，$[a, b]$ で　$g(x) \not\equiv h(x)$ で $a,\ b$ の一方又は両方が v の零点ならば，開区間 (a, b) にも v の零点が存在する．

証明： (1.25) より

$$\frac{d}{dx}\Big[v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\Big] + uv\big[h(x) - g(x)\big] = 0$$

$u(a) = u(b) = 0$ より

$$\Big[v\frac{du}{dx}\Big]_{x=a}^{x=b} = \int_a^b \big[g(x) - h(x)\big]uvdx \tag{1.26}$$

ここで

$$u(x) > 0 \quad a < x < b, \quad u^{'}(a) > 0 > u^{'}(b)$$

と仮定しても一般性は失わない．いま $g(x) \geq h(x) \qquad (a \leq x \leq b)$ より $v(x)$ は区間 $[a, b]$ で少なくとも 1 回符号を変えなければならない．なぜなら, 仮に $v(x) > 0, \quad a \leq x \leq b$ とすると

$$\text{左辺} = v(b)u^{'}(b) - v(a)u^{'}(a) < 0$$

となり矛盾する．特に $g(x) \not\equiv h(x)$ で，$a,\ b$ の一方又は両方で v の値が 0 のとき，区間 (a, b) で v の値が決して 0 にならないとする．例えば，$v(x) > 0$ とすると，(1.26) の右辺は正である．他方 $v(a) = v(b) = 0$ ならば左辺は 0，$v(a) = 0$ かつ $v(b) > 0$ ならば左辺は負，$v(b) = 0$ かつ $v(a) > 0$ ならば左辺は負となりいずれにせよ矛盾である．よって定理は証明された．　**（証明終わり）**

微分方程式 (1.25) を一般化し

$$\frac{d}{dx}\big[p(x)\ \frac{du}{dx}\big] + h(x)\ u = 0, \quad \frac{d}{dx}\big[p(x)\ \frac{dv}{dx}\big] + g(x)\ v = 0$$

とすると, 前と同様にして

$$\frac{d}{dx}\big[p(x)\ v\ \frac{du}{dx} - p(x)\ u\ \frac{dv}{dx}\big] + \big[h(x) - g(x)\big]\ u\ v = 0$$

$$\Big[p(x)\ v\ \frac{du}{dx}\Big]_{x=a}^{x=b} = \int_a^b \big[g(x) - h(x)\big]\ u\ v\ dx$$

が成り立つ．したがって，$p(x)$ が $a \leq x \leq b$ で一定符号であればスツルムの結果が成り立つ．実はベッセルの微分方程式もこの様な形をしている．微分方程式 (1.1) で z の

かわりに x とすると

$$\frac{d}{dx}\Big(x\frac{df}{dx}\Big)+\Big(x-\frac{\nu^2}{x}\Big)f=0$$

となり，　$p(x)=x$ と考えれば $(0,\infty)$ で定符号である．この方程式の解 $J_\nu(x)$ は $(0,\infty)$ で無限個の零点をもつことを証明することができる.（次節参照）すると第二の解 $Y_\nu(x)$ はスツルムの定理によって　$J_\nu(x)$ の隣り合う零点の間に $Y_\nu(x)$ の零点が存在し 唯一つである．なぜなら，$Y_\nu(x)$ が二つもつとすると，それらの間に $J_\nu(x)$ の零点が存在することになり矛盾する．

1.6　ベッセル関数の零点

ここでは ν に実数値を与えたときの $J_\nu(x)$ の零点の分布を考える．

命題 1.6 $J_\nu(x)$ の根はすべて実数であり $[0,\infty)$ で無限回 0 となる．

証明： 任意の α,β に対して $J_\nu(\alpha x)$ と $J_\nu(\beta x)$ を考えると, それぞれの微分方程式

$$\frac{d^2J_\nu(\alpha x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\,\frac{dJ_\nu(\alpha x)}{dx}+(\alpha^2-\frac{\nu^2}{x^2})J_\nu(\alpha x)=0$$

$$\frac{d^2J_\nu(\beta x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\,\frac{dJ_\nu(\beta x)}{dx}+(\beta^2-\frac{\nu^2}{x^2})J_\nu(\beta x)=0$$

が成り立つ．これより

$$\frac{d}{dx}\Big(x\,\frac{dJ_\nu(\alpha x)}{dx}\,J_\nu(\beta x)-x\,\frac{dJ_\nu(\beta x)}{dx}\,J_\nu(\alpha x)\Big)=(\beta^2-\alpha^2)\,x\,J_\nu(\alpha x)\,J_\nu(\beta x)$$

を得る．$0\le x\le b$ で積分すると，$\nu>-1$ のとき

$$(\beta^2-\alpha^2)\int_0^b x\,J_\nu(\alpha x)\,J_\nu(\beta x)\,dx=\Big[x\,\frac{dJ_\nu(\alpha x)}{dx}\,J_\nu(\beta x)-x\,\frac{dJ_\nu(\beta x)}{dx}\,J_\nu(\alpha x)\Big]_{x=0}^{x=b} \tag{1.27}$$

となる．右辺の $x=0$ からの寄与は 0 となる．いま α を実数でないとして

$$J_\nu(\alpha b)=0$$

が成り立つとし，β を α の複素共役にとれば，$J_\nu(x)$ は係数が実数のべき級数であるから $J_\nu(\beta b)=0$ も成り立つ．上の等式の右辺は 0 となるが

$$\text{左辺}=(\beta^2-\alpha^2)\int_0^b\Big|J_\nu(\alpha x)\Big|^2x\,dx\neq 0$$

に矛盾する．よって，α は実数である．ゆえに $\nu>-1$ のとき $J_\nu(z)$ の零点はすべて実数軸上にあることが示された．
次に $J_\nu(z)$ は $[0,\infty)$ で無限回 0 となることを示す．

$$U(x)\equiv J_\nu(x)\,\sqrt{x},\quad D(x)\equiv 1+\frac{1/4-\nu^2}{x^2}$$

とすると，ベッセルの微分方程式は標準形にできて

$$\frac{d^2U}{dx^2} + D(x)\,U = 0$$

となる． 次に，

$$V(x) \equiv \cos\Big(\sqrt{\frac{1}{2}}\,x\Big)$$

とすると，

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{1}{2}V = 0$$

となる．十分大きい x に対して $D(x) > \dfrac{1}{2}$ となり，$V(x)$ が $[0,\infty)$ で無限回 0 となるから，スツルムの定理より $U(x)$ は無限回 0 となり，同じことが $J_\nu(x)$ についても言える．同様の議論により $Y_\nu(x)$ が無限個の零点を実数軸にもつことが導ける．**（証明終わり）**

次に $Y_0(z)$ の実数軸以外の零点については $J_\nu(z)$ の場合と類似の方法で調べることができる．

命題 1.7 $Y_0(z)$ は $\mathrm{Re}(z) > 0$ では実数軸以外には零点をもたない．

証明：

$\nu = 0$ のとき $Y_0(z)$ の定義より，$z = 0$ の近傍で

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi}\left(\log\frac{z}{2} + \gamma\right) + O(z^2)$$

となる．ゆえに，$z = 0$ での近傍では $zY_0{}'(z) = 2/\pi + o(z)$ となる．これらの結果を用いて

$$\begin{aligned}(\beta^2 - \alpha^2)\int_0^b x\,Y_0(\alpha x)\,Y_0(\beta x)\,dx \\ = \Big[x\,Y_0(\beta x)\,\frac{dY_0(\alpha x)}{dx} - x\,Y_0(\alpha x)\,\frac{dY_0(\beta x)}{dx}\Big]_{x=b} - \frac{4}{\pi^2}\,\log\frac{\beta}{\alpha}\end{aligned} \tag{1.28}$$

を得る．さて，$Y_0(z)$ が実数でない零点 βb をもち αb をその複素共役とすると，それもまた零点である．そこで

$$\beta = Ae^{i\theta}, \quad \alpha = Ae^{-i\theta}, \quad A, \theta > 0$$

とおけば

$$\int_0^b \Big|Y_0(\alpha x)\Big|^2 x\,dx = -\frac{4\theta}{A^2\pi^2\,\sin 2\theta}$$

となる．左辺は正であるが，右辺は $0 < \theta < \pi/2$ のとき負である．したがって $Y_0(z)$ は $\mathrm{Re}(z) > 0$ では実数軸以外には零点をもたない． **（証明終わり）**

1.7　ベッセル関数の直交性

命題 1.8 α_k $(k=0,\ 1,\ 2,\dots)$ が超越方程式

$$J_n(\alpha b)=0 \qquad (n\ :\ 0\text{ 以上の整数},\ b>0) \tag{1.29}$$

の解であるとき

$$\int_0^b r\ J_n(\alpha_k r)J_n(\alpha_l r)\ dr=0 \qquad \alpha_k\neq\alpha_l \tag{1.30}$$

$$\int_0^b r\ J_n^2(\alpha_k r)\ dr=\frac{b^2}{2}\left[J_n{}'(\alpha_k b)\right]^2 \tag{1.31}$$

が成り立つ．

証明：　n を 0 以上の整数，α,β を二つの定数としてベッセル関数 $J_n(\alpha r), J_n(\beta r)$ を考える．1.6 節の (1.27) において $r=0$ における左辺の値は 0 となるから

$$b\left\{\alpha\ J_n{}'(\alpha b)J_n(\beta b)-\beta\ J_n{}'(\beta b)J_n(\alpha b)\right\}=(\beta^2-\alpha^2)\int_0^b r\ J_n(\alpha r)J_n(\beta r)\ dr \tag{1.32}$$

と表すことができる．ここで α,β が超越方程式

$$J_n(\alpha b)=0$$

の根 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots$ のどれか二つであると

$$\int_0^b r\ J_n(\alpha_k r)J_n(\alpha_l r)\ dr=0 \qquad \alpha_k\neq\alpha_l$$

が成り立つ．すなわち関数列

$$J_n(\alpha_0 r),\quad J_n(\alpha_1 r),\quad J_n(\alpha_2 r),\dots$$

は直交関数列をつくる．次に

$$\alpha=\alpha_k,\qquad \beta=\alpha_k+\varepsilon,\qquad |\varepsilon|\ll 1$$

とすると, テイラー展開より

$$J_n(\beta b)=J_n(b\alpha_k)+J_n{}'(b\alpha_k)\ b\varepsilon+\cdots \qquad (\text{但し}\ \cdots\ \text{は}\ \varepsilon\ \text{の高次の項})$$

となるから，(1.32) に代入すると

$$b^2\alpha_k\ \varepsilon\left[J_n{}'(\alpha_k b)\right]^2+\cdots=2\alpha_k\ \varepsilon\ \int_0^b r\ J_n(\alpha_k r)J_n(\alpha_k r+\varepsilon r)\ dr$$

となる．$\varepsilon \to 0$ の極限値をとると

$$\int_0^b r\ J_n^2(\alpha_k r)\ dr = \frac{b^2}{2}\left[J_n{}'(\alpha_k b)\right]^2 \tag{1.33}$$

を得る． **（証明終わり）**

α が超越方程式 (1.29) の代わりに

$$\alpha\ J_n{}'(\alpha b) + h\ J_n(\alpha b) = 0 \tag{1.34}$$

を満足するときも (1.32) から同様な直交関数列をつくることができる．
この方程式が無限可算個の実根をもつことは，後に述べる 1.14 節のベッセル関数の漸近展開から理解される．

命題 1.9 α_k $(k = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$ が超越方程式 (1.34) の解であるとき

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^b r\ J_n(\alpha_k r) J_n(\alpha_l r)\ dr = 0 \qquad \alpha_k \neq \alpha_l \\ \displaystyle\int_0^b r\ J_n{}^2(\alpha_k r)\ dr = \frac{1}{2\alpha_k{}^2}\ (h^2 b^2 + \alpha_k{}^2 b^2 - n^2)\ J_n{}^2(\alpha_k b) \end{cases} \tag{1.35}$$

が成り立つ．

証明： 超越方程式 (1.29) の代わりに (1.34) の根 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ から直交関数列をつくったとき，命題 1.8 と同様に考えると

$$\int_0^b r\ J_n(\alpha_k r) J_n(\alpha_l r)\ dr = 0 \qquad \alpha_k \neq \alpha_l$$

を得る．また $\beta = \alpha_k + \varepsilon$ とおくと (1.32) の左辺は

$$\begin{aligned} & b\big\{\alpha_k J_n{}'(\alpha_k b) J_n(\beta b) - (\alpha_k + \varepsilon) J_n{}'(\beta b) J_n(\alpha_k b)\big\} \\ & \quad = b\Big[\alpha_k J_n{}'(\alpha_k b)\big\{J_n(\alpha_k b) + J_n{}'(\alpha_k b)\ b\varepsilon + \cdots\big\} \\ & \qquad\qquad - (\alpha_k + \varepsilon) J_n(\alpha_k b)\big\{J_n{}'(\alpha_k b) + J_n{}''(\alpha_k b)\ b\varepsilon + \cdots\big\}\Big] \\ & \quad = \frac{b^2 h^2\ \varepsilon}{\alpha_k}\ J_n{}^2(\alpha_k b) - b\varepsilon\ \big\{J_n{}'(\alpha_k b) + b\alpha_k J_n{}''(\alpha_k b)\big\} J_n(\alpha_k b) + \cdots \\ & \quad = \frac{\varepsilon\ \{b^2 h^2 + (\alpha_k{}^2 b^2 - n^2)\}}{\alpha_k}\ J_n{}^2(\alpha_k b) + \cdots \end{aligned}$$

となり $\varepsilon \to 0$ のとき極限値を計算すれば

$$\int_0^b r\ J_n{}^2(\alpha_k r)\ dr = \frac{1}{2\alpha_k{}^2}\ (h^2 b^2 + \alpha_k{}^2 b^2 - n^2)\ J_n{}^2(\alpha_k b)$$

を得る． **（証明終わり）**

1.8 ハンケル関数と変形ベッセル関数

ハンケル関数 ${H_\nu}^{(1)}(z)$, ${H_\nu}^{(2)}(z)$ を第一種, 第二種ベッセル関数を用いて

$$\begin{cases} {H_\nu}^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z) \\ {H_\nu}^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z) \end{cases} \tag{1.36}$$

と定義する．これより

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2}\Big\{{H_\nu}^{(1)}(z) + {H_\nu}^{(2)}(z)\Big\}$$

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{2i}\Big\{{H_\nu}^{(1)}(z) - {H_\nu}^{(2)}(z)\Big\}$$

を得る．また，ハンケル関数を第一種ベッセル関数のみを用いて表すことができる．

$$\begin{aligned} {H_\nu}^{(1)}(z) &= J_\nu(z) + \frac{i\left[J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)\right]}{\sin\nu\pi} \\ &= \frac{J_{-\nu}(z) - e^{-i\nu\pi}J_\nu(z)}{i\ \sin\nu\pi} \end{aligned} \tag{1.37}$$

同様にして

$${H_\nu}^{(2)}(z) = \frac{e^{\nu\pi i}J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{i\ \sin\nu\pi} \tag{1.38}$$

を得る．また， $J_\nu(z), Y_\nu(z)$ の漸化式を定義式 (1.36) 代入すると

$$\begin{cases} {H_{\nu-1}}^{(1)}(z) + {H_{\nu+1}}^{(1)}(z) = \dfrac{2\nu}{z}\ {H_\nu}^{(1)}(z) \\ \\ {H_{\nu-1}}^{(2)}(z) + {H_{\nu+1}}^{(2)}(z) = \dfrac{2\nu}{z}\ {H_\nu}^{(2)}(z) \\ {H_{\nu-1}}^{(1)}(z) - {H_{\nu+1}}^{(1)}(z) = 2{H_\nu}^{(1)'}(z) \\ {H_{\nu-1}}^{(2)}(z) - {H_{\nu+1}}^{(2)}(z) = 2{H_\nu}^{(2)'}(z) \end{cases} \tag{1.39}$$

次にベッセルの微分方程式で z の代わりに iz とおいて得られる方程式

$$\frac{d^2f}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{df}{dz} - \Big(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\Big)f = 0 \tag{1.40}$$

を **変形ベッセル微分方程式** と呼び，その解を変形ベッセル関数という．もとの微分方程式の基本解は $J_\nu(z), Y_\nu(z)$ であるから，一つの解は $J_\nu(iz)$ であり

$$J_\nu(iz) = e^{\nu\pi i/2}\Big(\frac{z}{2}\Big)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\ \Gamma(\nu+m+1)}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2m}$$

となる．よって **第一種変形ベッセル関数** $I_\nu(z)$ を

$$I_\nu(z) = \Big(\frac{z}{2}\Big)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\ \Gamma(\nu+m+1)}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2m} \tag{1.41}$$

と定義する．そして，**第二種変形ベッセル関数** $K_\nu(z)$ を

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin\nu\pi} \tag{1.42}$$

と定義する．ν が整数でないとき $I_\nu(z)$ と $K_\nu(z)$ は互いに独立であるから, これら二つの関数が変形ベッセル関数の基本解である．$\nu \to n$ (整数) のとき $I_{-n}(z) = I_n(z)$ となり

$$K_n(z) = \lim_{\nu\to n} K_\nu(z)$$

と定義すれば, $Y_n(z)$ を求めたのと同様にして

$$K_0(z) = -\log\Big(\frac{z}{2}\Big)\,I_0(z) + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\psi(m+1)}{(m!)^2}\,\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2m} \tag{1.43}$$

$$\begin{aligned} K_n(z) = {} & \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^m(n-m-1)!}{m!}\,\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2m-n} \\ & + (-1)^{n+1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\,(n+m)!}\,\Big(\frac{z}{2}\Big)^{n+2m}\Big\{\log\Big(\frac{z}{2}\Big) - \frac{1}{2}\psi(m+1) - \frac{1}{2}\psi(n+m+1)\Big\} \end{aligned} \tag{1.44}$$

を得る．
次に変形ベッセル関数の漸化式を求める．定義より

$$J_\nu(iz) = e^{\nu\pi i/2}\,I_\nu(z), \qquad I_\nu(z) = e^{\nu\pi i/2}\,J_\nu(-iz) \tag{1.45}$$

を得る．これらのことから

$$\begin{aligned} I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) &= i\,e^{-\nu\pi i/2}\Big\{J_{\nu-1}(iz) - J_{\nu+1}(iz)\Big\} \\ &= 2i\,e^{-\nu\pi i/2}\,\frac{d}{d(iz)}J_\nu(iz) \end{aligned}$$

ゆえに

$$I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) = 2{I_\nu}'(z)$$

を得る．同様にして

$$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}\,I_\nu(z)$$

を得る．これらを第二種変形ベッセル関数に用いると

$$\begin{aligned} K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) &= -\frac{2\nu}{z}\,K_\nu(z) \\ K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) &= -2{K_\nu}'(z) \end{aligned}$$

を得る．
第二種変形ベッセル関数はハンケル関数を用いて表すこともできる．

$$\begin{aligned} {H_\nu}^{(1)}(iz) &= \frac{J_{-\nu}(iz) - e^{-i\nu\pi}J_\nu(iz)}{i\,\sin\nu\pi} \\ &= \frac{e^{-\nu\pi i/2}\,I_{-\nu}(z) - e^{-\nu\pi i/2}\,I_\nu(z)}{i\,\sin\nu\pi} = \frac{2}{\pi i}\,e^{-\nu\pi i/2}\,K_\nu(z) \end{aligned}$$

となるから

$$K_\nu(z) = (\pi i/2)\, e^{\nu\pi i/2}\, H_\nu{}^{(1)}(iz)$$

を得る．また，　$K_\nu(z) = K_{-\nu}(z)$ であるから

$$K_\nu(z) = (\pi i/2)\, e^{-\nu\pi i/2}\, H_{-\nu}{}^{(1)}(iz) \tag{1.46}$$

と表すこともできる．
変形ベッセル関数の積分表示については, 第一種ベッセル関数のポアッソンの積分表示 (1.13) より $\mathrm{Re}(\nu+1/2) > 0$ において

$$\begin{aligned}
I_\nu(z) = e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(iz) &= \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)} \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\nu-1/2}\, e^{-z\xi}\, d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \left\{ \int_0^1 (1-\xi^2)^{\nu-1/2}\, e^{-z\xi}\, d\xi + \int_0^1 (1-\xi^2)^{\nu-1/2}\, e^{z\xi}\, d\xi \right\} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^1 (1-\xi^2)^{\nu-1/2}\, \cosh(z\xi)\, d\xi
\end{aligned}$$

となるから

$$I_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^1 (1-\xi^2)^{\nu-1/2}\, \cosh(z\xi)\, d\xi, \quad \mathrm{Re}(\nu+1/2) > 0 \tag{1.47}$$

を得る．

1.9　ベッセル関数のロンスキアン

ベッセル関数のロンスキアンを考えることによりいくつかの関係式を導くことができる．

命題 1.10 ベッセル関数について次の関係式が成り立つ

$$J_\nu(z) J_{-\nu-1}(z) - J_{-\nu}(z) J_{\nu+1}(z) = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi z} \tag{1.48}$$

$$J_n(z) Y_n{}'(z) - J_n{}'(z) Y_n(z) = \frac{2}{\pi z} \tag{1.49}$$

証明： ベッセルの微分方程式は

$$\frac{d}{dz}\left(z\,\frac{df}{dz}\right) + \left(z - \frac{\nu^2}{z}\right) f = 0$$

と表すことができ，　u, v をこの方程式の二つの独立な解とすると

$$\frac{d}{dz}\left[z\,(uv' - u'v)\right] = 0$$

という関係から

$$u(z)\ v'(z) - u'(z)\ v(z) = \frac{c}{z}$$

を得る． $u(z), v(z)$ は独立な関数より積分定数 c は 0 ではない．さて， ν が整数でないときベッセルの微分方程式の解 J_ν と $J_{-\nu}$ は互いに独立であるので

$$J_\nu(z){J_{-\nu}}'(z) - {J_\nu}'(z)J_{-\nu}(z) = \frac{c}{z}$$

が成り立つ．さらにベッセルの漸化式 (1.19)

$${J_\nu}'(z) = \frac{\nu}{z}\ J_\nu(z) - J_{\nu+1}(z), \qquad {J_{-\nu}}'(z) = \frac{\nu}{z}\ J_\nu(z) + J_{-\nu-1}(z)$$

を用いると

$$J_\nu(z){J_{-\nu}}'(z) - {J_\nu}'(z)J_{-\nu}(z) = J_\nu(z)J_{-\nu-1}(z) - J_{-\nu}(z)J_{\nu+1}(z) = \frac{c}{z}$$

を得る．ベッセル関数の級数表示からわかるように, ロンスキアンは z^{-1} から始まるべき級数であるが，上の等式から z^{-1} の項のみであることがわかる．したがって

$$c = \lim_{z\to 0} z\left\{J_\nu(z)J_{-\nu-1}(z) - J_{-\nu}(z)J_{\nu+1}(z)\right\}$$

が成り立つ．$J_\nu(z)$ は

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu\left\{\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + \cdots\right\}$$

の形をしているから（但し， $\cdots$ は z の高次のべき級数を表す.）

$$J_\nu(z)J_{-\nu-1}(z) - J_{-\nu}(z)J_{\nu+1}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-1}\left\{\frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu)}\right\} + \cdots$$

となる．ここで $\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu) = \pi/\sin\pi(\nu+1)$ を代入すると

$$c = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi}$$

を得る．よって

$$J_\nu(z)J_{-\nu-1}(z) - J_{-\nu}(z)J_{\nu+1}(z) = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi z}$$

を得る．ν のかわりに $-\nu$ とすると

$$J_{\nu-1}(z)J_{-\nu}(z) - J_\nu(z)J_{-\nu+1}(z) = \frac{2\sin\nu\pi}{\pi z} \tag{1.50}$$

と書くこともできる．ν が整数 n に等しいとき, 互いに一次独立な解として $J_n(z)$ と $Y_n(z)$ をとると，第二種ベッセル関数の漸化式 (1.21) を用い上記の証明によって

$$J_n(z){Y_n}'(z) - {J_n}'(z)Y_n(z) = \frac{2}{\pi z}$$

を得る． **（証明終わり）**

1.10 8字形積分路での複素積分表示

ベッセル関数 $J_\nu(z)$ の $\mathrm{Re}(\nu) > -/2$ での複素積分表示を求める．関数

$$w(z) = z^\nu \int_a^b e^{izt}\, T(t)\, dt \tag{1.51}$$

がベッセルの微分方程式の解となるためには，どのような関数 $T(t)$ と a を始点，b を終点とする積分路を選べばよいか考える．a, b は必ずしも実数である必要はない．

$$\frac{dw}{dz} = \nu z^{\nu-1} \int_a^b e^{izt}\, T(t)\, dt + z^\nu \int_a^b it\, e^{izt}\, T(t)\, dt$$

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \nu(\nu-1)\, z^{\nu-2} \int_a^b e^{izt}\, T(t)\, dt + 2\nu z^{\nu-1} \int_a^b it\, e^{izt}\, T(t)\, dt - z^\nu \int_a^b e^{izt}\, t^2\, T(t)\, dt$$

となるから，ベッセルの微分方程式に代入すると

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \Big(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\Big)w \\
&= z^\nu \int_a^b e^{izt}\, (1-t^2)\, T\, dt + z^{\nu-1}(2\nu+1)i \int_a^b t\, e^{izt}\, T\, dt \\
&= i\, z^{\nu-1} \int_a^b \Big\{(2\nu+1)\, t\, T - \frac{d}{dt}\big[(t^2-1)T\big]\Big\} e^{izt}\, dt - i\, z^{\nu-1} \Big[(1-t^2)\, T\, e^{izt}\Big]_a^b
\end{aligned}$$

となる．したがって

$$\frac{d}{dt}\big[(t^2-1)\, T\big] = (2\nu+1)\, t\, T \tag{1.52}$$

$$\Big[(1-t^2)\, T\, e^{izt}\Big]_a^b = 0 \tag{1.53}$$

となる条件が満たされるような関数 $T(t)$ と a を始点，b を終点とする積分路を得れば関数 $w(z)$ はベッセル関数である．微分方程式 (1.52) を解くと

$$T(t) = (t^2-1)^{\nu-1/2}$$

を得る．したがって，等式 (1.53) に代入して

$$\Big[(t^2-1)\, T\, e^{izt}\Big]_a^b = \Big[e^{izt}\, (t^2-1)^{\nu+1/2}\Big]_a^b = 0$$

となる条件を満たす a を始点，b を終点とする積分路を定めればよい．これには二つの方法がある．第一は積分路として閉曲線をとり，その閉曲線に沿って t の値が変化してもとの値に戻ったとき $e^{izt}(t^2-1)^{\nu+1/2}$ の値がもとに戻るように始点 a，終点 b の積分路を 定める方法．第二は $t=a, t=b$ で $e^{izt}(t^2-1)^{\nu+1/2}$ が 0 となるように始点 a，終点 b の積分路を定める方法である．以下，この二つの方法について議論をする．まず第一の方法について述べる．第二の方法は次節で述べる．$(t^2-1)^{\nu+1/2}$ は $\nu+1/2$ が整数でない限り一般に t の多価関数で $t=1$ および $t=-1$ がその分岐点である．この関数を表す Riemann 面（付録参照）は一般に多くの枚数の面でできているが，それら

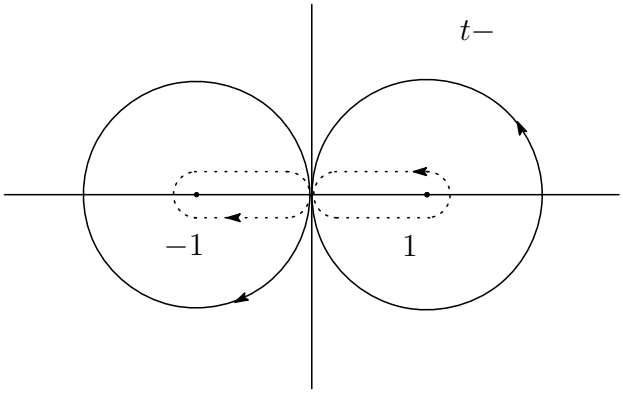

図 1.3: 積分路：(1+,-1-)

を区別するために仮に 1 および -1 と $i\infty$ とを結ぶ直線を各面の境界と考え，t が 1 より大きい実数値をとるとき $\arg(t^2-1)=2n\pi$ であると考える面を S_n とする．そうすると S_n 上で $-1<t<1$ のときには $\arg(t^2-1)=(2n-1)\pi$ となり，境界線を右から左へ横切れば S_n から S_{n+1} に移ることになる．よっていま S_0 上のある点から出発して $t=1$ を正の向きに，$t=-1$ を負の向きに一周する路を作れば Riemann 面上の閉曲線となる．そこで図 1.3 に示された，$t=1,-1$ を中心に半径 1 の 8 字形円形径路 の実線の積分路を考えて $e^{izt}(t^2-1)^{\nu+1/2}$ の値がどのように変化するか調べる．

まず，$t=1$ を中心とした円形径路では

$$t-1=e^{i\theta}, \qquad -\pi<\theta<\pi$$

と極座標を用いて表すと，θ の値が $-\pi$ から π まで変化したとき $(t-1)^{\nu+1/2}$ の偏角は $2\pi(\nu+1/2)$ だけ増す．他方 $(t+1)^{\nu+1/2}=(2+e^{i\theta})^{\nu+1/2}$ は θ の値が $-\pi$ から π まで変化したとき，もとの値にもどる．したがって $(t^2-1)^{\nu+1/2}$ の値は偏角が $2\pi(\nu+1/2)$ だけ増加しその絶対値は変化しない．次に他の分岐点 $t=-1$ の周りを時計まわりに t の値が変化してもとの値にもどったとき，$(t^2-1)^{\nu+1/2}$ の絶対値はもとにもどり，偏角は $2\pi(\nu+1/2)$ だけ減少する．e^{izt} は分岐点をもたないから 8 字形径路に沿って一周したとき $e^{izt}(t^2-1)^{\nu+1/2}$ の値はもとにもどり

$$w(z)=z^{\nu}\int^{(1+,-1-)} e^{izt}\,(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt \tag{1.54}$$

はベッセル微分方程式の一つの解である．

具体的にこの積分をパラメータ表示すると次のとうりである．$a=0$ を始点，$b=0$ を終点とする閉曲線 C をパラメータ θ を用いて

$$C:\ [-\pi,\ 3\pi]\ni\theta\longrightarrow t(\theta)=\begin{cases} 1+e^{i\theta} & (-\pi<\theta\le\pi) \\ -1+e^{-i(\theta-\pi)} & (\pi<\theta\le 3\pi)\end{cases}$$

と表わし，$t^2-1=r(\theta)e^{i\varphi(\theta)}$ とする．ここで φ は $[-\pi,\ 3\pi]$ 上で

$$\varphi(\theta)=\begin{cases} \theta+\arg(2+e^{i\theta}) & (-\pi<\theta\le\pi) \\ (\theta-\pi)+\arg(-2+e^{-i(\theta-\pi)}) & (\pi<\theta\le 3\pi)\end{cases}$$

とすると，$\varphi(-\pi)=-\pi,\ \varphi(3\pi)=-\pi$ となり連続となる．したがって (1.54) の積分は

$$w(z)=z^{\nu}\int_{-\pi}^{3\pi}e^{izt(\theta)}r(\theta)^{\nu+1/2}e^{i\varphi(\theta)(\nu+1/2)}t'(\theta)\ d\theta$$

を意味し

$$\left[e^{izt(\theta)}r(\theta)^{\nu+1/2}e^{i\varphi(\theta)(\nu+1/2)}\right]_{-\pi}^{3\pi}=0$$

となる．　さて，この積分が $J_\nu(z)$ とどのような関係にあるか調べてみる．

命題 1.11 ベッセル関数 $J_\nu(z)$ の複素積分表示は

$$J_\nu(z)=\frac{\Gamma(1/2-\nu)}{2\pi i\ \sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int^{(1+,-1-)}e^{izt}\ (t^2-1)^{\nu-1/2}\ dt,\quad \mathrm{Re}(\nu)+1/2>0\ \ (1.55)$$

となる．但し，$\nu+1/2$ は正整数に等しくないものとする．

証明：積分 (1.54) はベッセル微分方程式の解であり，被積分関数が $t=\pm1$ を除いては t の正則な関数であるから，積分路を図 1.3 に示す点線の径路に沿ったものに変更できる．無限級数

$$e^{izt}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{i^m\ z^m\ t^m}{m!}$$

はこの径路上で一様収束するから

$$\begin{aligned}\int^{(1+,-1-)}e^{izt}\ (t^2-1)^{\nu-1/2}\ dt&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{i^m\ z^m}{m!}\int^{(1+,-1-)}t^m\ (t^2-1)^{\nu-1/2}dt\\&\quad(t=0\text{ に関して対象な径路より奇数次の項は }0)\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2\ (-1)^m\ z^{2m}}{(2m)!}\int^{(1+,0-)}t^{2m}\ (t^2-1)^{\nu-1/2}\ dt\\&\quad(u=t^2\text{ とおくと})\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\ z^{2m}}{(2m)!}\int^{(1+,0-)}u^{m-1/2}\ (u-1)^{\nu-1/2}\ du\end{aligned}$$

となる．ここに積分径路 $(1+,0-)$ は図 1.4 に示されるものである．$\mathrm{Re}(\nu)>-1/2$ とすれば $u=0,u=1$ の近傍からの積分への寄与は，　，　を $u-$ 平面の実数軸に近づけると 0 になる．

積分の値を求めるために $u-1=re^{i\theta}$ とおくと，　に沿っては $\theta=\pi$ ，　に沿って

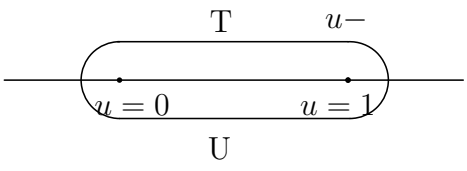

図 1.4: 積分路：(1+,0-)

は $\theta = -\pi$ であるから

$$\int u^{m-1/2}\,(u-1)^{\nu-1/2}\,du = e^{i\pi(\nu+1/2)}\int_0^1 (1-r)^{m-1/2}\,r^{\nu-1/2}\,dr$$
$$\int u^{m-1/2}\,(u-1)^{\nu-1/2}\,du = e^{-i\pi(\nu+1/2)}\int_1^0 (1-r)^{m-1/2}\,r^{\nu-1/2}\,dr$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}\int^{(1+,0-)} u^{m-1/2}\,(u-1)^{\nu-1/2}\,du &= \left[e^{i\pi(\nu+1/2)} - e^{-i\pi(\nu+1/2)}\right]\int_0^1 (1-r)^{m-1/2}\,r^{\nu-1/2}\,dr \\ &= 2i\,\sin\pi(\nu+1/2)\,\frac{\Gamma(m+1/2)\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(m+\nu+1)}\end{aligned}$$

となる．このようにして

$$\begin{aligned}&z^\nu\int^{(1+,-1-)} e^{izt}\,(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt \\ &= 2i\,\sin\pi(\nu+1/2)\,\Gamma(\nu+1/2)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\,z^{2m+\nu}}{(2m)!}\,\frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(m+\nu+1/2)}\end{aligned}$$

を導くことができる．さらに，ガンマ関数の倍法公式 (1.24) を用いると

$$\frac{\Gamma(m+1/2)}{(2m)!} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2m)}{\Gamma(m)\,(2m)!\,2^{2m-1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m}\,m!}$$

であるから

$$\begin{aligned}&z^\nu\int^{(1+,-1-)} e^{izt}\,(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt \\ &= 2i\,\sin\pi(\nu+1/2)\,\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}\,2^\nu\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \\ &= \frac{2i\,\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2-\nu)}\,2^\nu\,J_\nu(z)\end{aligned}$$

を得る．故に，ベッセルの複素積分による表示は

$$J_\nu(z) = \frac{\Gamma(1/2-\nu)}{2\pi i\,\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int^{(1+,-1-)} e^{izt}\,(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt, \quad \mathrm{Re}(\nu)+1/2>0$$

となる．但し，$\nu+1/2$ は正整数に等しくないものとする． **（証明終わり）**

1.11 U字形積分路での複素積分表示

次に，第二の方法である始点 a と終点 b で $(t^2-1)^{\nu+1/2}\ e^{izt}=0$ となる場合を考える．

命題 1.12 ベッセル関数 $J_{-\nu}(z)$ の複素積分表示は

$$J_{-\nu}(z)=\frac{\Gamma(1/2-\nu)}{2\pi i\,\sqrt{\pi}}\ e^{\nu\pi i}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{\nu}\int_C e^{izt}\ (t^2-1)^{\nu-1/2}\ dt,\quad \mathrm{Re}(z)>0 \tag{1.56}$$

となる． 但し，$\nu+1/2$ は正整数に等しくないものとする．

証明： $\mathrm{Re}(z)>0$ ならば $(t^2-1)^{\nu+1/2}\ e^{izt}$ は $t\to i\infty$ のとき 0 となるから，積分路を図 1.5 の積分路 C のように，$i\infty$ から出発し -1 および $+1$ の両方を左側に囲んでまた $i\infty$ にもどる積分路をとる．条件 $\mathrm{Re}(z)>0$ が満足されている限り $w(z)$ はベッセルの微分方程式の解である．なお C は S_0 面上にあるものとする．積分路の全部分が単位円の

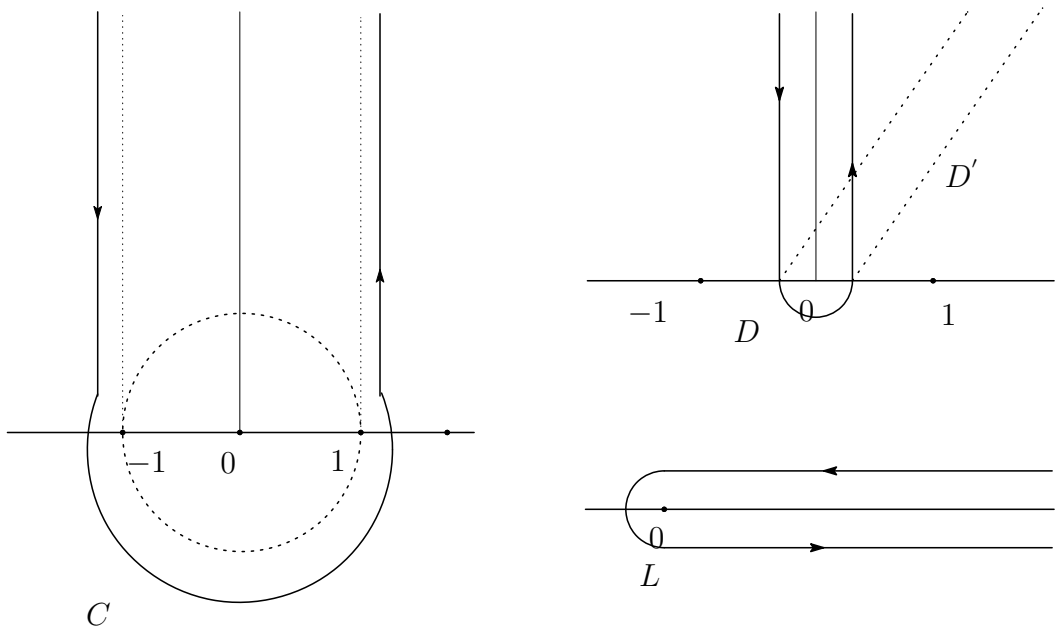

図 1.5:

外にあるようにとれば，積分路 C 上では $|t|>1$ であるから，二項定理とガンマ関数の関係式 (1.18) によって

$$(t^2-1)^{\nu-1/2}=\ t^{2\nu-1}\Big(1-\frac{1}{t^2}\Big)^{\nu-1/2}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1/2-\nu+m)}{m!\,\Gamma(1/2-\nu)}\ t^{2\nu-1-2m}$$

とできるから

$$
\begin{aligned}
w(z) &= z^{\nu} \int_C e^{izt}\ (t^2-1)^{\nu-1/2}\ dt \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}\ \Gamma(1/2-\nu+m)}{m!\ \Gamma(1/2-\nu)} \int_C e^{izt}\ t^{2\nu-1-2m}\ dt
\end{aligned}
$$

右辺の各項の被積分関数については，$t\ =\ \pm 1$ では分岐点をもたず，$t\ =\ 0$ で分岐点をもつ．分岐点 $t=0$ を除いては正則であるから，積分路 C を必ずしも単位円の外部にとる必要はなく単に原点を囲めばよい．その積分路を図 1.5 の積分路 D とする．D を原点のまわりに $\arg z$ だけ回転させて積分路の両端を $i\infty e^{-i\arg z}$ としてもよい．なぜなら，$\mathrm{Re}(z)>0$ のとき $(t^2-1)^{\nu+1/2}\ e^{izt}\ \to\ 0$ という条件を満たすからである．回転後の積分路を D' で表し

$$
zt\ =\ ue^{-3\pi i/2}
$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
\int_C e^{izt}\ t^{2\nu-1-2m}\ dt\ &=\ \int_D e^{izt}\ t^{2\nu-1-2m}\ dt \\
&=\ \int_{D'} e^{izt}\ t^{2\nu-1-2m}\ dt \\
&=\ z^{2m-2\nu}(-1)^{m+1}e^{-\nu\pi i} \int_L e^{-u}\ (-u)^{2\nu-1-2m}\ du
\end{aligned}
$$

となる．ここで積分路 L は図 1.5 に示すものである．右辺の積分は (1.26) と (1.27) から

$$
\begin{aligned}
\int_L e^{-u}\ (-u)^{2\nu-1-2m}\ du &= -2i\ \sin\pi(2\nu-2m)\ \Gamma(2\nu-2m) \\
&= \frac{-2\pi i}{\Gamma(2m+1-2\nu)}
\end{aligned}
$$

となる．となる．したがって，ガンマ関数の倍法公式 (1.24) をもちいて

$$
\begin{aligned}
w(z) &= 2\pi i\ e^{-\nu\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\ z^{2m-\nu}\ \Gamma(1/2-\nu+m)}{m!\ \Gamma(1/2-\nu)\Gamma(2m+1-2\nu)} \\
&= 2\pi i\ e^{-\nu\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\ z^{2m-\nu}}{m!\ \Gamma(1/2-\nu)}\ \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-2\nu}\ \Gamma(m-\nu+1)} \\
&= \frac{2\pi i\ \sqrt{\pi}\ e^{-\nu\pi i}}{\Gamma(1/2-\nu)\ 2^{-\nu}} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\ \Gamma(m-\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}
\end{aligned}
$$

となる．ゆえに，

$$
J_{-\nu}(z) = \frac{\Gamma(1/2-\nu)}{2\pi i\ \sqrt{\pi}}\ e^{\nu\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \int_C e^{izt}\ (t^2-1)^{\nu-1/2}\ dt, \quad \mathrm{Re}(z)>0
$$

を得る．但し，$\nu+1/2$ は正整数に等しくないものとする．

（証明終わり）

1.12 ハンケル関数の複素積分表示

いま $\mathrm{Re}(z) > 0$ の場合，(1.55)，(1.56) における積分路を変形して，図 1.6 のように上の方を無限の遠方に延ばせば実軸に平行な部分からの積分への寄与は 0 となるから

$$J_\nu(z) = \frac{\Gamma(1/2-\nu)}{2\pi i\,\sqrt{\pi}}\,\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \left\{\int_{C_1} + \int_{C_2}\right\}$$
$$J_{-\nu}(z) = \frac{\Gamma(1/2-\nu)}{2\pi i\,\sqrt{\pi}}\,e^{\nu\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \left\{\int_{D_1} + \int_{D_2}\right\}$$

となる．C_1 と D_1 とは共に S_0 上にあるから全く一致するが，C_2 と D_2 は向きが逆で異なる Riemann 面 S_1 と S_0 の上を走っている.（Riemann 面 S_n については 1.9 節 8 字積分路での積分表示を参照.）一般に t の同じ値に対しては

$$S_0\text{上の } (t^2-1)^{\nu-1/2} = S_1\text{上の } (t^2-1)^{\nu-1/2}\,e^{-2\pi i(\nu-1/2)}$$

であるから

$$\int_{D_2} e^{izt}\,(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt = e^{-2\pi i(\nu-1/2)}\int_{-C_2} e^{izt}\,(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt$$
$$= e^{-2\pi\nu i}\int_{C_2} e^{izt}\,(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt$$

を得る．よって

$$J_{-\nu}(z) = \frac{\Gamma(1/2-\nu)}{2\pi i\,\sqrt{\pi}}\,\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \left\{e^{\nu\pi i}\int_{C_1} + e^{-\nu\pi i}\int_{C_2}\right\}$$

を得る.

ハンケル関数とベッセル関数の関係式 (1.38)，(1.38)

$$H_\nu{}^{(1)}(z) = \frac{J_{-\nu}(z) - e^{-\nu\pi i}\,J_\nu(z)}{i\,\sin\nu\pi}$$
$$H_\nu{}^{(2)}(z) = \frac{e^{\nu\pi i}\,J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{i\,\sin\nu\pi}$$

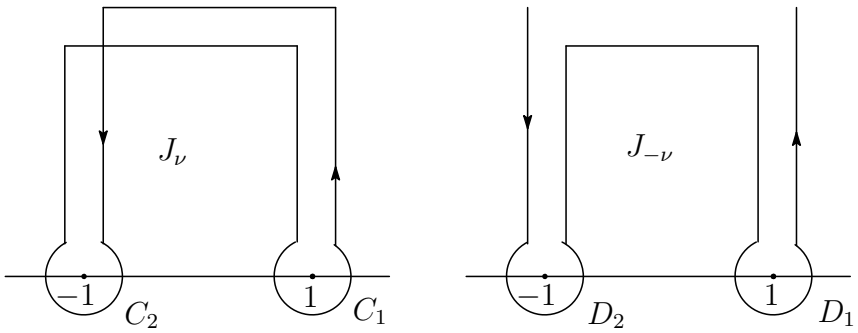

図 1.6:

から

$$\begin{cases} H_\nu{}^{(1)}(z) = \dfrac{\Gamma(1/2-\nu)}{\pi i\,\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{z}{2}\right)^\nu \displaystyle\int_{C_1} e^{izt}\,(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt \\ \\ H_\nu{}^{(2)}(z) = \dfrac{\Gamma(1/2-\nu)}{\pi i\,\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{z}{2}\right)^\nu \displaystyle\int_{C_2} e^{izt}\,(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt \end{cases} \tag{1.57}$$

を得る．但しこの積分表示は $\mathrm{Re}(z)>0, \mathrm{Re}(\nu)+1/2>0$ ，そして $\nu+1/2$ は正整数に等しくないときのみ可能である．又，$H_\nu{}^{(1)}(z)$ の積分路は S_0 にあり，$H_\nu{}^{(2)}(z)$ の積分路は S_1 にある．

1.13 鞍点法

二つの関数 $f(z), \phi(z)$ が与えられたとき

$$|f| < A\,|\phi|, \qquad |z|>\delta$$

であるような定数 A, δ が存在するとき

$$f = O(\phi)$$

と表す．また任意の ϵ に対して

$$|f| < \epsilon\,|\phi|, \qquad |z|>\delta$$

となる δ が存在するとき

$$f = o(\phi)$$

と表す．すなわち $|z|\to\infty$ のとき $|f/\phi|$ がある定数より小であれば f は $O(\phi)$ の関数であり，$|f/\phi|$ が 0 に収束すれば f は $o(\phi)$ の関数である．

ある関数が，適当な積分路に沿っての定積分

$$g(s) = \int_L e^{sf(z)}\,\phi(z)\,dz$$

で与えられるとき，$|s|$ が大きいときの関数の漸近形を求める．但し，$f(z), \phi(z)$ は $z-$平面のある領域で正則な関数とし，s が複素数のときその偏角を $f(z)$ に掛けたものを新たに $f(z)$ と見なせばよいから s は実数と見なしてよい．いま $f(z)$ が

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y), \qquad z = x+iy$$

とする．$f(z)$ が正則であるから，コーシー・リーマンの関係から $u(x,y)$ はラプラスの方程式を満たし

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

が成り立つ．$f'(z_0)=0$ とすると $z=z_0$ では $\partial u/\partial x = 0, \quad \partial u/\partial y = 0$ であるから，$u(x,y)$ はそこで停留値をとる．しかし，上の関係式から極大でも極小でもありえない．

それは鞍点である．したがって積分路が鞍点を通り，$u(x,y)$ の尾根に垂直になるように変形すれば，鞍点の近傍からの積分が $s \to \infty$ のとき大きな寄与を占めることは明らかである．すなわち，関数 $f(z)$ の微分係数が 0 となる点を通るように積分路を変形すれば $s \to \infty$ のときこの点の近傍からの積分への寄与が積分の近似を値を与える．

命題 1.13 $f(z), \phi(z)$ は $z-$ 平面のある領域で正則な関数とし，複素数 s の関数 $g(s)$ が適当な積分路に沿って

$$g(s) = \int_L e^{sf(z)}\ \phi(z)\ dz \tag{1.58}$$

で与えられるとき，$|s|$ が大きいときの関数の漸近形は

$$\phi(z_0)\ e^{sf(z_0)} \Big[\frac{-2\pi}{s\ f''(z_0)}\Big]^{1/2} \tag{1.59}$$

で与えられる．この方法を **リーマンの鞍点法** という．

証明： いま $f(z)$ は正則であるからべき級数に展開できて

$$f(z) = f(z_0) + a_2\ (z-z_0)^2 + a_3\ (z-z_0)^3 + \cdots, \qquad |z-z_0| = R$$

とする．収束円上での $f(z)$ の最大値を M とすれば，コーシーの不等式

$$|a_n| \le \frac{M}{R^n}$$

が成り立つ．したがって

$$f(z) = f(z_0) + a_2\ (z-z_0)^2 + F(z)$$

とおくと

$$\big|F(z)\big| \le M\ \Big\{\frac{|z-z_0|^3}{R^3} + \frac{|z-z_0|^4}{R^4} + \cdots\Big\} = \frac{M\ |z-z_0|^3\ R}{R^3\{R-|z-z_0|\}}, \quad |z-z_0| < R$$

となる． いま $\epsilon > 0$ として，$|z-z_0| \le s^{-\epsilon} \le R/2$ となるよう s を大きくとると

$$\big|F(z)\big| \le 2M\ R^{-3}\ s^{-3\epsilon}$$

となる．よって

$$e^{sf(z)} = \exp\{s\ f(z_0) + s\ a_2\ (z-z_0)^2\} \cdot \{1 + O(s^{1-3\epsilon})\}$$

が成り立ち，$\epsilon > 1/3$ ととれば最後の項は $s \to \infty$ のとき小さくなる．また，$\phi(z)$ についても同様に

$$\phi(z) = \phi(z_0) + \Phi(z)$$

とおけば，コーシーの不等式から

$$\Big|\Phi(z)\Big| \le 2M^{'}\ R^{-1}\ s^{-\epsilon}$$

を得る．ここで $1/3 < \epsilon < 1/2$ ととれば

$$\phi(z) = \phi(z_0) + O(s^{-\epsilon}) = \phi(z_0) + o(s^{1-3\epsilon})$$

が成り立つ．$|z - z_0| < R$ からの積分への寄与は

$$\phi(z_0)\ e^{sf(z_0)} \int_L e^{sa_2(z-z_0)^2} \Big\{1 + O(s^{1-3\epsilon})\Big\}\ dz \tag{1.60}$$

となる．この積分を計算するため

$$a_2 = A\ e^{i\alpha}, \quad A > 0; \qquad z - z_0 = r\ e^{i\theta}, \quad -s^{-\epsilon} < r < s^{\epsilon}$$

とすれば，指数部分は

$$a_2\ (z - z_0)^2 = A\ r^2\ e^{i(\alpha+2\theta)}$$

となるので，$\alpha + 2\theta = \pi$ で与えられる θ で積分路の方向を決めるものとする．この方向に沿って積分すれば第一項は

$$\phi(z_0)\ e^{sf(z_0)+i(\pi-\alpha)/2} \int_{-s^{-\epsilon}}^{s^{-\epsilon}} e^{-Asr^2}\ dr$$

となる．いま

$$t^2 = A\ s\ r^2, \quad T = (A\ s^{1-2\epsilon})^{1/2} = O(s^{1/2-\epsilon})$$

とおけば

$$\int_{-s^{-\epsilon}}^{s^{-\epsilon}} e^{-Asr^2}\ dr = (As)^{-1/2} \int_{-T}^{T} e^{-t^2}\ dt = (As)^{-1/2}\Big\{\sqrt{\pi} - 2\int_T^{\infty} e^{-t^2}\ dt\Big\}$$

となる．$\displaystyle\int_T^{\infty} e^{-t^2}\ dt$ については

$$\int_T^{\infty} e^{-t^2}\ dt = \Big[\frac{e^{-t^2}}{-2t}\Big]_T^{\infty} - \int_T^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\ dt < \frac{e^{-T^2}}{2T}$$
$$e^{-T^2} \le \frac{1}{1+T^2}$$

からオーダーは $O(s^{3\epsilon-3/2})$ である．したがって　(1.60) は

$$\phi(z_0)\ e^{sf(z_0)+i(\pi-\alpha)/2}\ (As)^{-1/2}\big\{\sqrt{\pi} + O(s^{3\epsilon-3/2})\big\}\big\{1 + O(s^{1-3\epsilon})\big\}$$

となり，$z = z_0$ の近傍からの積分 (1.58) への寄与は $s \to \infty$ のとき

$$\phi(z_0)\ e^{sf(z_0)} \Big[\frac{-2\pi}{s\ f^{"}(z_0)}\Big]^{1/2}$$

に漸近的に近づく． **（証明終わり）**

この方法でガンマ関数の漸近形を求めることができる．$|\arg(z)| < \pi$ において定義された複素変数のガンマ関数 $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$ において t のかわりに $t\, z$ とおけば

$$\Gamma(z) = z^z \int_0^{\infty \exp\{-i \arg(z)\}} e^{z(\log t - t)}\, t^{-1}\, dt$$

となる．被積分関数の指数部分は $t = 1$ で鞍点をもつからその近傍からの積分への寄与を (1.59) によって計算すれば

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\, z^{z-1/2}\, e^{-z}, \qquad |z| \to \infty, \qquad |\arg(z)| < \pi \tag{1.61}$$

となる．これは **スターリング (Stirling) の公式** とよぶ．

1.14 ベッセル関数の漸近展開

ベッセル関数はハンケル関数で表されるから，はじめにハンケルの漸近展開について述べる．そのためにまずダルブー (Darboux) の定理を証明する．

補題 1.1 (ダルブー (Darboux) の定理) $f(z)$ が a と $a+h$ を結ぶ直線上で微分可能な関数であるとき

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{h^m}{m!}\, f^{(m)}(a) + \frac{h^n}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}(a+th)\, (1-t)^{n-1}\, dt \tag{1.62}$$

成り立つ．

証明： $\displaystyle\sum_{m=1}^{n-1} \frac{h^m}{m!}\, (1-t)^m\, f^{(m)}(a+th)$ を t で直接微分すると

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{h^m}{m!}\, (1-t)^m\, f^{(m)}(a+th) \\
&= \sum_{m=1}^{n-1} \Big\{ \frac{-h^m}{(m-1)!}\, (1-t)^{m-1}\, f^{(m)}(a+th) + \frac{h^{m+1}}{m!}\, (1-t)^m\, f^{(m+1)}(a+th) \Big\} \\
&\text{(第一項の総和で } m-1 = p \text{ とおく)} \\
&= -\sum_{p=0}^{n-2} \frac{h^{p+1}}{p!}\, (1-t)^p\, f^{(p+1)}(a+th) + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{h^{m+1}}{m!}\, (1-t)^m\, f^{(m+1)}(a+th) \\
&= \frac{h^n}{(n-1)!}\, (1-t)^{m-1}\, f^{(n)}(a+th) - h\, f^{(1)}(a+th)
\end{aligned}$$

両辺を t について 0 から 1 まで積分すれば

$$f(a+h)-f(a)=\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^m}{m!}\,f^{(m)}(a)+\frac{h^n}{(n-1)!}\int_0^1 f^{(n)}(a+th)\,(1-t)^{n-1}\,dt$$

を得る．**（証明終わり）**

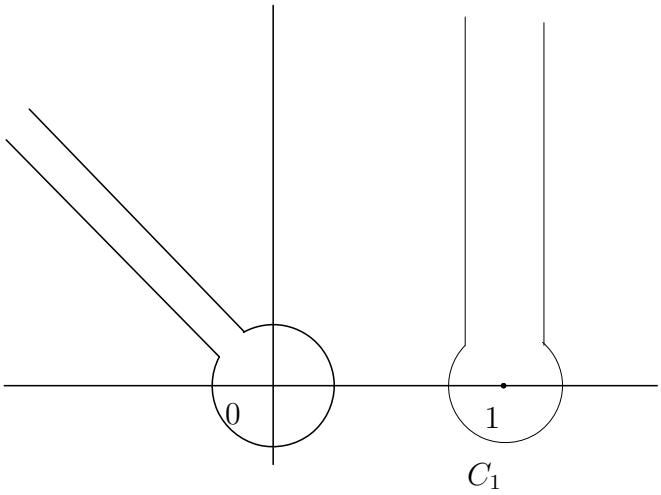

図 1.7: 積分路：$\int_{\infty}^{(0+)}$

次にハンケル関数の漸近展開について述べる．

補題 1.2 ハンケル関数の漸近展開は $-\pi < \arg(z) < 2\pi,\quad \mathrm{Re}(\nu)+1/2 > 0$, そして $\nu+1/2$ は正整数に等しくないとき

$$H_\nu{}^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{i(z-\pi/4-\nu\pi/2)}\left\{\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\Gamma(\nu+m+1/2)}{m!\,\Gamma(\nu-m+1/2)}\left(\frac{i}{2z}\right)^m+R_n\right\}\qquad(1.63)$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}R_n\,\sin(\nu+1/2)\pi&=\frac{i}{2(n-1)!\,\Gamma(\nu-n+1)}\\&\quad\times\left(\frac{i}{2z}\right)^n\int_{\infty}^{(0+)}e^{-u}(-u)^{\nu-1/2}\,u^n\int_0^1(1-t)^{n-1}\left(1+\frac{iut}{2z}\right)^{\nu-n-1/2}dt\,du\end{aligned}$$

とし，積分 $\int_{\infty}^{(0+)}$ の示す積分路は図 1.7 による．

証明： ハンケル関数の積分表示 (1.57) より

$$H_\nu{}^{(1)}(z)=\frac{\Gamma(1/2-\nu)}{\pi i\,\sqrt{\pi}}\,\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_{1+\infty i}^{(1+)}e^{izt}\,(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt$$

で $t-1=i\,u\,z^{-1}$ とすれば

$$
\begin{aligned}
H_\nu{}^{(1)}(z) &= \frac{\Gamma(1/2-\nu)}{\pi\,\sqrt{2\pi z}}\int_{\infty}^{(0+)} e^{iz}\,e^{-u}\,(-i)^{\nu-1/2}\,(-u)^{\nu-1/2}\,\big(1+\frac{iu}{2z}\big)^{\nu-1/2}\,du \\
&= \frac{i\,\Gamma(1/2-\nu)}{\pi\,\sqrt{2\pi z}}\,e^{i(z-\pi/4-\nu\pi/2)}\int_{\infty}^{(0+)} e^{-u}\,(-u)^{\nu-1/2}\,\big(1+\frac{iu}{2z}\big)^{\nu-1/2}\,du \qquad (1.64)
\end{aligned}
$$

となる．ここで $f(z)=(1+z)^{\nu-1/2},\quad a=0,\quad h=iu/2z$ としてダルブーの定理を用いると

$$
\begin{aligned}
&\big(1+\frac{iu}{2z}\big)^{\nu-1/2}-f(0) \\
&=\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m!}\,\big(\frac{iu}{2z}\big)^m\,f^{(m)}(0)+\frac{1}{(n-1)!}\,\big(\frac{iu}{2z}\big)^n\int_0^1 f^{(n)}\big(\frac{iut}{2z}\big)\,(1-t)^{n-1}\,dt
\end{aligned}
$$

であり

$$
f^{(m)}(0)=\big(\nu-\frac{1}{2}\big)\big(\nu-\frac{3}{2}\big)\cdots\big(\nu-m+\frac{1}{2}\big)=\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu-m+1/2)}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
&\big(1+\frac{iu}{2z}\big)^{\nu-1/2} \\
&=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{m!}\big(\frac{iu}{2z}\big)^m\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu-m+1/2)} \\
&+\frac{1}{(n-1)!}\big(\frac{iu}{2z}\big)^n\int_0^1\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu-n+1/2)}\Big(1+\frac{iut}{2z}\Big)^{\nu-n-1/2}(1-t)^{n-1}\,dt
\end{aligned}
$$

となる．したがって

$$
\begin{aligned}
&H_\nu{}^{(1)}(z) \\
&=\frac{i\,\Gamma(1/2-\nu)}{\pi\,\sqrt{2\pi z}}\,e^{i(z-\pi/4-\nu\pi/2)} \\
&\times\int_{\infty}^{(0+)} e^{-u}(-u)^{\nu-1/2}\,\Big\{\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{m!\,\Gamma(\nu-m+1/2)}\,\big(\frac{iu}{2z}\big)^m \\
&+\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{(n-1)!\,\Gamma(\nu-n+1/2)}\,\big(\frac{iu}{2z}\big)^n\int_0^1\Big(1+\frac{iut}{2z}\Big)^{\nu-n-1/2}\,(1-t)^{n-1}\,dt\Big\}\,du
\end{aligned}
$$

となる． またガンマ関数の複素積分表示 (1.26) から

$$
\begin{aligned}
\int_{\infty}^{(0+)} e^{-u}\,(-u)^{\nu-1/2}\,u^m\,du &= (-1)^m(-2i)\,\sin\pi(\nu+m+1/2)\int_0^{\infty} e^{-u}\,u^{\nu+m-1/2}\,du \\
&= -2i\,(-1)^m\,\Gamma(\nu+m+1/2)\,\sin\pi(\nu+m+1/2)
\end{aligned}
$$

を用いると

$$
H_\nu{}^{(1)}(z)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2\Gamma(1/2-\nu)\Gamma(\nu+1/2)}{\pi\,\sqrt{2\pi z}}\; e^{i(z-\pi/4-\nu\pi/2)} \\
&\Big\{\sum_{m=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\nu+m+1/2)}{m!\,\Gamma(\nu-m+1/2)}\;\sin\pi(\nu+m+1/2)\Big(\frac{-i}{2z}\Big)^m \\
&+ \frac{i}{2(n-1)!\,\Gamma(\nu-n+1)}\Big(\frac{i}{2z}\Big)^n \int_{\infty}^{(0+)} e^{-u}\,(-u)^{\nu-1/2}\,u^n \\
&\qquad\qquad \times \int_0^1 (1-t)^{n-1}\Big(1+\frac{iut}{2z}\Big)^{\nu-n-1/2}\,dt\,du\Big\}
\end{aligned}
$$

$\Gamma(1/2-\nu)\Gamma(\nu+1/2) = \pi/\sin\pi(\nu+1/2)$　より

$$
\begin{aligned}
&R_n\;\sin(\nu+1/2)\pi \\
&= \frac{i}{2(n-1)!\,\Gamma(\nu-n+1)} \\
&\times \Big(\frac{i}{2z}\Big)^n \int_{\infty}^{(0+)} e^{-u}(-u)^{\nu-1/2}\,u^n \int_0^1 (1-t)^{n-1}\Big(1+\frac{iut}{2z}\Big)^{\nu-n-1/2}\,dt\,du
\end{aligned}
$$

とおくと

$$
H_\nu{}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\;e^{i(z-\pi/4-\nu\pi/2)}\;\Big\{\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\Gamma(\nu+m+1/2)}{m!\,\Gamma(\nu-m+1/2)}\;\Big(\frac{i}{2z}\Big)^m + R_n\Big\}
$$

を得る．ハンケル関数の積分表示 (1.57) は $\mathrm{Re}(z)\;>\;0$ として導いたが，ハンケル関数 $H_\nu{}^{(1)}$ が無限遠方で積分が 0 に収束するためには，$\mathrm{Re}(izt)<0$ を満たすような方向を選ばなければならない．いま

$$
z = re^{i\theta}, \qquad t = \rho e^{i\alpha}
$$

とすると，

$$
\mathrm{Re}(izt) = -r\;\rho\;\sin(\theta+\alpha)\;<\;0
$$

である．よって　$0<\theta+\alpha<\pi$ を満たすものであればよい．α については分岐点 -1 をひきかからぬようにするためには $-\pi<\alpha<\pi$ であることが必要であるから $-\pi<\theta<2\pi$ であればよい．したがって (1.64) から導かれる展開 (1.63) は $-\pi<\arg(z)<2\pi$ で成り立つ．　**（証明終わり）**

同様にして

$$
H_\nu{}^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\;e^{-i(z-\pi/4-\nu\pi/2)}\;\Big\{\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\Gamma(\nu+m+1/2)}{m!\,\Gamma(\nu-m+1/2)}\;\Big(\frac{-i}{2z}\Big)^m + R_n^{'}\Big\} \qquad (1.65)
$$

を得る．また (1.65) は $-2\pi<\arg(z)<\pi$ で成り立つ．

命題 1.14 $-\pi < \arg(z) < \pi$, $\mathrm{Re}(\nu) > -1/2$ に対して次が成り立つ.

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\cos(z-\frac{\pi}{4}-\frac{\nu\pi}{2})\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k\,\Gamma(\nu+2k+1/2)}{(2k)!\,\Gamma(\nu-2k+1/2)}\left(\frac{1}{2z}\right)^{2k}\right.$$
$$\left.-\sin(z-\frac{\pi}{4}-\frac{\nu\pi}{2})\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}\frac{(-1)^k\,\Gamma(\nu+2k+3/2)}{(2k+1)!\,\Gamma(\nu-2k-1/2)}\left(\frac{1}{2z}\right)^{2k+1}+R_n{}^{(1)}\right\} \tag{1.66}$$

$$Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\sin(z-\frac{\pi}{4}-\frac{\nu\pi}{2})\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k\,\Gamma(\nu+2k+1/2)}{(2k)!\,\Gamma(\nu-2k+1/2)}\left(\frac{1}{2z}\right)^{2k}\right.$$
$$\left.+\cos(z-\frac{\pi}{4}-\frac{\nu\pi}{2})\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}\frac{(-1)^k\,\Gamma(\nu+2k+3/2)}{(2k+1)!\,\Gamma(\nu-2k-1/2)}\left(\frac{1}{2z}\right)^{2k+1}+R_n{}^{(2)}\right\} \tag{1.67}$$

但し $\lim_{|z|\to\infty} R_n{}^{(k)} z^{n-1} =$ 有限確定 $\qquad (k=1,2)$

注意）$\mathrm{Re}(\nu) \le -1/2$ の場合の漸近展開はベッセル関数の漸化式 (1.17) を用いて上記の展開公式が成り立つ.

証明： ハンケル関数の定義 (1.36) より

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2}\Big\{H_\nu{}^{(1)}(z)+H_\nu{}^{(2)}(z)\Big\},\quad Y_\nu(z) = \frac{-i}{2}\Big\{H_\nu{}^{(1)}(z)-H_\nu{}^{(2)}(z)\Big\}$$

である．$\nu-1/2 \ne l \quad (l=0,1,2,\dots)$ のとき，(1.63), (1.65) から

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\cos(z-\frac{\pi}{4}-\frac{\nu\pi}{2})\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k\,\Gamma(\nu+2k+1/2)}{(2k)!\,\Gamma(\nu-2k+1/2)}\left(\frac{1}{2z}\right)^{2k}\right.$$
$$\left.-\sin(z-\frac{\pi}{4}-\frac{\nu\pi}{2})\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}\frac{(-1)^k\,\Gamma(\nu+2k+3/2)}{(2k+1)!\,\Gamma(\nu-2k-1/2)}\left(\frac{1}{2z}\right)^{2k+1}+R_n{}^{(1)}\right\}$$
$$Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\sin(z-\frac{\pi}{4}-\frac{\nu\pi}{2})\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k\,\Gamma(\nu+2k+1/2)}{(2k)!\,\Gamma(\nu-2k+1/2)}\left(\frac{1}{2z}\right)^{2k}\right.$$
$$\left.+\cos(z-\frac{\pi}{4}-\frac{\nu\pi}{2})\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}\frac{(-1)^k\,\Gamma(\nu+2k+3/2)}{(2k+1)!\,\Gamma(\nu-2k-1/2)}\left(\frac{1}{2z}\right)^{2k+1}+R_n{}^{(2)}\right\}$$

を得る．また (1.63) における R_n の定義から

$$\lim_{|z|\to\infty} R_n{}^{(k)} z^n = \text{有限確定} \qquad (k=1,\ 2)$$

となり，左辺の関数はベッセル関数の漸近級数である．
$\nu-1/2 = l \quad (l=0,1,2,\dots)$ のとき，$J_\nu(z)$ については (1.3), (1.4) と漸化式 (1.17)

，$Y_\nu(z)$ については (1.9) と漸化式 (1.20) から得る．$n \geq l$ のとき $R_n(z) = 0$ となる．

（証明終わり）

第2章　ルジャンドル関数

歴史的には，ルジャンドル関数はラプラスの微分方程式を解くときに現れた．ラプラスの微分方程式を球座標で解こうとするとルジャンドル関数が現れる．ここでは，まず導入としてルジャンドル多項式を定義し，この多項式の直交性について述べた．そして一般のルジャンドル微分方程式の解として，第一種ルジャンドル関数，第二種ルジャンドルを定義し級数解との関係について述べた．また，ルジャンドル陪関数と漸近形についてもふれた．

2.1　ルジャンドル多項式

3 次元ユークリッド空間の異なる 2 点を $P(x,y,z), Q(x_0,y_0,z_0)$ とする．このとき，関数 $V(x,y,z)$ を

$$V(x,y,z) = \left(\overline{PQ}\right)^{-1} = \left\{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right\}^{-1/2} \tag{2.1}$$

と定義すると

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{2.2}$$

を得る．これを **ラプラス (Laplace) の方程式** とよぶ．ここで球座標 (r,θ,φ) を

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{2.3}$$

によって定義する．但し，r は動径，θ は余緯度，φ は方位角とよばれる．いま点 Q の座標を $(0,0,r_0)$ とすれば

$$\overline{PQ}^2 = x^2 + y^2 + (z-r_0)^2 = r^2 - 2rr_0\cos\theta + {r_0}^2$$

となり、関数 V は球座標をもちいて

$$V = \left\{r^2 - 2rr_0\cos\theta + {r_0}^2\right\}^{-1/2} = {r_0}^{-1}\left\{1 - 2\frac{r}{r_0}\cos\theta + \left(\frac{r}{r_0}\right)\right\}^{-1/2} \tag{2.4}$$

と表すことができる．いま，$r_0 > r$ と仮定して V を (r/r_0) のべき級数に展開し

$${r_0}^{-1}\left\{1 - 2\frac{r}{r_0}\cos\theta + \left(\frac{r}{r_0}\right)\right\}^{-1/2} = \frac{1}{r_0}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \quad r < r_0 \tag{2.5}$$

と表される．

命題 2.1 (2.5) のべき級数の係数 $P_n(\cos\theta)$ は $\zeta = \cos\theta$ とおくと ζ の n 次多項式である．そして，この多項式を n **次のルジャンドル *(Legendre)* 多項式** とよぶ．

証明： $\zeta = \cos\theta, \quad r/r_0 = \alpha$ とおいて (2.5) を

$$\left(1 - 2\alpha\zeta + \alpha^2\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\zeta) \qquad |\alpha| < 1 \tag{2.6}$$

と変形する．$\zeta = 1$ とおけば

$$(1 - 2\alpha + \alpha^2)^{-1/2} = (1-\alpha)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n$$

となるので

$$P_n(1) = 1 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

を得る．また $\zeta = -1$ とおくと

$$P_n(-1) = (-1)^n$$

を得る．$\alpha = 0$ とおけば

$$P_0(\zeta) = 1$$

を得る．次に (2.6) の両辺の対数をとり α について微分すると

$$\frac{\zeta - \alpha}{1 - 2\alpha\zeta + \alpha^2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^{n-1} P_n(\zeta)}{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\zeta)}$$

$$(\zeta - \alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\zeta) = (1 - 2\alpha\zeta + \alpha^2) \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^{n-1} P_n(\zeta)$$

となる．両辺の α^n のべき係数を比較し整理すると

$$(n+1)P_{n+1}(\zeta) - nP_{n-1}(\zeta) = (2n+1)\zeta P_n(\zeta) \tag{2.7}$$

となる．$n = 1, 2$ とおけば

$$P_1(\zeta) = \zeta, \qquad P_2(\zeta) = (3\zeta^2 - 1)/2$$

のようにして，$P_1, P_2, P_3, \ldots$ が求められ $P_n(\zeta)$ が ζ の多項式であることは漸化式より明らかである． **（証明終わり）**

関係式 (2.7) を **ルジャンドル多項式の漸化式** という．そして (2.6) の ζ について対数微分をとると，上と同様にして

$$\frac{d}{d\zeta}\Big[P_{n+1}(\zeta) - P_{n-1}(\zeta)\Big] = (2n+1)P_n(\zeta) \tag{2.8}$$

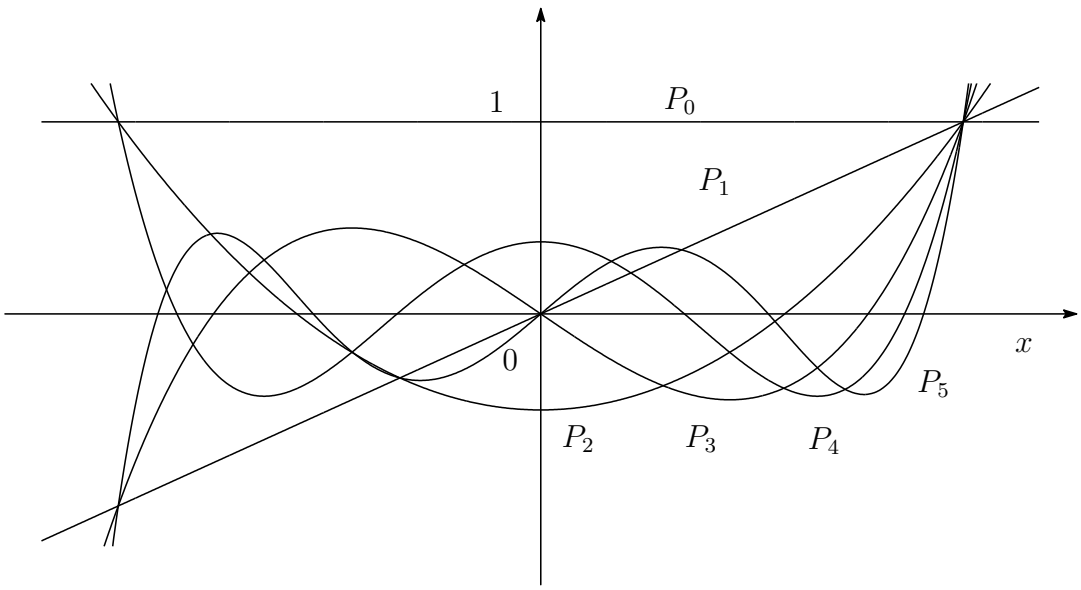

図 2.1: ルジャンドル多項式 $P_n(\zeta)$

を得る．

次にルジャンドル多項式の定義式 (2.6) から $P_n(\cos\theta)$ を求めてみる．

命題 2.2 ルジャンドル多項式 $P_n(\cos\theta)$ は

$$\begin{cases} P_{2k}(\cos\theta) = \displaystyle\sum_{s=0}^{k-1} \frac{(2s)!(4k-2s)!}{2^{4k-1}(s!)^2((2k-s)!)^2} \cos[(2k-2s)\theta] + \frac{((2k)!)^2}{2^{4k}(k!)^4} \\ P_{2k+1}(\cos\theta) = \displaystyle\sum_{s=0}^{k} \frac{(2s)!(4k+2-2s)!}{2^{4k+1}(s!)^2((2k+1-s)!)^2} \cos[(2k+1-2s)\theta] \end{cases} \tag{2.9}$$

と表すことができる．

証明：

$$(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2) = (1-\alpha e^{i\theta})(1-\alpha e^{-i\theta})$$

であり，$|z|<1$ であれば

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+1/2)}{r!\Gamma(1/2)} z^r$$

と展開できるから，(2.6) により

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\cos\theta) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+1/2)\Gamma(s+1/2)}{r!s!\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)} \alpha^{r+s} e^{i(r-s)\theta}$$

となる．両辺の α^n の係数を比較して

$$P_n(\cos\theta) = \sum_{r=0}^{n} \frac{\Gamma(r+1/2)\Gamma(n-r+1/2)}{\pi r!(n-r)!} e^{i(2r-n)\theta}$$

を得る．ガンマ関数の倍法公式 (1.24) で $z = n - r + 1/2$ とおけば

$$\Gamma(n-r+1/2) = \frac{(2n-2r)!\sqrt{\pi}\ 2^{-(2n-2r)}}{(n-r)!}$$

となり，$z = r + 1/2$ とおくと

$$\Gamma(r+1/2) = \frac{(2r)!\sqrt{\pi}\ 2^{-2r}}{(r)!}$$

となるから，$e^{i(2r-n)\theta}$ の係数は

$$\frac{\Gamma(r+1/2)\Gamma(n-r+1/2)}{\pi r!(n-r)!} = \frac{(2r)!(2n-2r)!}{2^{2n}(r!)^2((n-r)!)^2}$$

となる．したがって，

$$P_n(\cos\theta) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(2r)!(2n-2r)!}{2^{2n}(r!)^2((n-r)!)^2}\ e^{i(2r-n)\theta} \tag{2.10}$$

となる．ここで $r = s$ と $r = n - s$ としたときの係数の和は

$$\frac{(2s)!(2n-2s)!}{2^{2n-1}(s!)^2((n-s)!)^2} \cos[(n-2s)\theta]$$

となり，n が奇数 $2k+1$ であればすべての項は対にしてまとめられるが，偶数 $2k$ のときは第 k 項が余る．そこで

$$P_{2k}(\cos\theta) = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(2s)!(4k-2s)!}{2^{4k-1}(s!)^2((2k-s)!)^2}\ \cos[(2k-2s)\theta] + \frac{((2k)!)^2}{2^{4k}(k!)^4}$$

$$P_{2k+1}(\cos\theta) = \sum_{s=0}^{k} \frac{(2s)!(4k+2-2s)!}{2^{4k+1}(s!)^2((2k+1-s)!)^2}\ \cos[(2k+1-2s)\theta]$$

となる． **（証明終わり）**

次に (2.10) を

$$P_n(\cos\theta) = \sum_{r=0}^{n} c_r e^{i(2r-n)\theta}$$

と表すとき，$\theta = 0$ とすると

$$P_n(1) = \sum_{r=0}^{n} c_r$$

となるが，$P_n(1)=1$ より

$$\sum_{r=0}^{n} c_r = 1$$

を得る．これより，不等式

$$|P_n(\cos\theta)| \leq \sum_{r=0}^{n} c_r = 1 \tag{2.11}$$

を得る．

2.2 ルジャンドルの微分方程式

ラプラスの方程式 (2.2) を球座標 (r,θ,φ) を用いて表せば

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \cot\theta\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\Big) = 0 \tag{2.12}$$

となる．一方，V を球座標で表すと (2.5) より

$$V = \frac{1}{r_0}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\big(\frac{r}{r_0}\big)^n \qquad r < r_0$$

で与えられるから

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial r} &= \frac{1}{{r_0}^2}\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(\cos\theta)\big(\frac{r}{r_0}\big)^{n-1}\\ \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} &= \frac{1}{{r_0}^3}\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)P_n(\cos\theta)\big(\frac{r}{r_0}\big)^{n-2}\end{aligned}$$

となる．$r<r_0$ のとき $|P_n(\cos\theta)| \leq 1$ より，これら二つのべき級数は収束する．(2.12) に代入すると

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{r}{r_0}\Big)^{n-2}\Big\{n(n+1)P_n + \frac{d^2P_n}{d\theta^2} + \cot\theta\frac{dP_n}{d\theta}\Big\} = 0$$

を得る．この関係式が r に無関係に成り立つためには，P_n は微分方程式

$$\frac{d^2P_n}{d\theta^2} + \cot\theta\frac{dP_n}{d\theta} + n(n+1)P_n = 0 \tag{2.13}$$

の解でなければならない．この微分方程式を **ルジャンドルの微分方程式** とよぶ．θ のかわりに $\zeta=\cos\theta$ とおくと微分方程式は

$$\frac{d}{d\zeta}\Big\{(1-\zeta^2)\frac{dP_n}{d\zeta}\Big\} + n(n+1)P_n = 0 \tag{2.14}$$

と表すことができる．この微分方程式を用いて，$P_n(\zeta)$ を ζ の多項式として直接求めてみる．

命題 2.3 ルジャンドル多項式 $P_n(\zeta)$ は

$$P_n(\zeta) = \sum_{s=0}^{\sigma} \frac{(-1)^s (2n-2s)!}{2^n s!(n-2s)!(n-s)!}\, \zeta^{n-2s} \tag{2.15}$$

と表すことができる．但し，σ は n が偶数のときは $n/2$，奇数のときは $(n-1)/2$ である．

証明：

$$P_n(\zeta) = \sum_{k=0}^{m} a_k \zeta^k$$

とおき (2.14) に代入すると

$$\sum_{k=0}^{m} k(k-1) a_k \zeta^{k-2} + \sum_{k=0}^{m} a_k \zeta^k \big\{ n(n+1) - k(k+1) \big\} = 0$$

を得る． よって ζ のべき係数はすべて 0 とならなければならない．まず，ζ^m の係数について

$$n(n+1) = m(m+1) \tag{2.16}$$

が成り立ち，$m = n, \quad -n-1$ を得るが $m = -n-1$ は $P_n(\zeta)$ が ζ の多項式であることに反する．よって $m = n$ が求めるものである．次に $\zeta^k \quad (0 \le k < n)$ の係数比較から

$$a_{k+2}(k+2)(k+1) = a_k (k-n)(k+n+1)$$

$$a_k = \frac{(k+2)(k+1)}{(k-n)(k+n+1)}\, a_{k+2} \tag{2.17}$$

を得る．この漸化関係を繰り返すと

$$a_{n-2s} = \frac{(-1)^s (n!)^2 (2n-2s)!}{(n-s)!s!(n-2s)!(2n)!}\, a_n$$

となる．ここで $a_n = (2n)!/2^n (n!)^2$ ととると

$$a_{n-2s} = \frac{(-1)^s (2n-2s)!}{2^n s!(n-2s)!(n-s)!}$$

を得る．故に，求める解は

$$P_n(\zeta) = \sum_{s=0}^{\sigma} \frac{(-1)^s (2n-2s)!}{2^n s!(n-2s)!(n-s)!}\, \zeta^{n-2s}$$

である．但し，σ は n が偶数のときは $n/2$，奇数のときは $(n-1)/2$ である．**（証明終わり）**

次に，ロドリーグ (Rodrigues) の公式を導く．

命題 2.4 (ロドリーグ (Rodrigues) の公式) 等式

$$P_n(\zeta) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{d\zeta^n}\Big[(\zeta^2-1)^n\Big] \tag{2.18}$$

が成り立つ．これをロドリーグ (*Rodrigues*) の公式という．

証明：

$$\frac{d^n}{d\zeta^n}[\zeta^{2n-2s}] = \frac{(2n-2s)!}{(n-2s)!}\,\zeta^{n-2s}$$

から (2.15) に代入すると

$$P_n(\zeta) = \sum_{s=0}^{\sigma}\frac{(-1)^s}{2^n s!(n-s)!}\frac{d^n}{d\zeta^n}\,[\zeta^{2n-2s}]$$

となる．二項定理から

$$(\zeta^2-1)^n = \sum_{s=0}^{n} {}_nC_s\zeta^{2n-2s}(-1)^s = \sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s n!}{(n-s)!s!}\,\zeta^{2n-2s}$$

であるから，両辺を n 回微分すれば

$$\frac{1}{n!}\,\frac{d^n}{d\zeta^n}[(\zeta^2-1)^n] = \sum_{s=0}^{\sigma}\frac{(-1)^s}{(n-s)!s!}\,\frac{d^n}{d\zeta^n}[\zeta^{2n-2s}]$$

となる．これより

$$P_n(\zeta) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{d\zeta^n}\Big[(\zeta^2-1)^n\Big]$$

を得る． **（証明終わり）**

2.3 ルジャンドル多項式の直交性

関数 $f(\zeta)$ を $-1 \le \zeta \le 1$ で定義された関数として

$$I = \int_{-1}^{1} f(\zeta)P_n(\zeta)\,d\zeta$$

とすれば，(2.18) を用いて

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f(\zeta)\frac{d^n}{d\zeta^n}[(\zeta^2-1)^n]\,d\zeta \\ &= \frac{1}{2^n n!}\Big[\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}[(\zeta^2-1)^n]f(\zeta)\Big]_{-1}^{1} - \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f'(\zeta)\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}[(\zeta^2-1)^n]\,d\zeta \end{aligned}$$

となる．もし $f(\zeta)$ が $\zeta = \pm 1$ で有限確定値をもてば右辺の第一項は 0 となる．この過程を n 回繰り返せば

$$\int_{-1}^{1} f(\zeta) P_n(\zeta)\, d\zeta = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} (\zeta^2 - 1)^n f^{(n)}(\zeta)\, d\zeta \tag{2.19}$$

を得る．とくに

$$f(\zeta) = \zeta^m \qquad m : \text{正整数}$$

のとき

$$f^{(n)}(\zeta) = \begin{cases} \Gamma(m+1)\zeta^{m-n}/\Gamma(m-n+1) & m \geq n \\ 0 & m < n \end{cases}$$

であるから，$m \geq n$ のとき

$$\int_{-1}^{1} P_n(\zeta)\zeta^m\, d\zeta = \frac{\Gamma(m+1)}{2^n n! \Gamma(m-n+1)} \int_{-1}^{1} (1-\zeta^2)^n \zeta^{m-n}\, d\zeta \qquad m \geq n$$

となる．したがって，$m-n$ が奇数であれば積分の値は 0 となる．$m-n$ が偶数であれば

$$\int_{-1}^{1} (1-\zeta^2)^n \zeta^{m-n}\, d\zeta = B\Big(n+1, \frac{m-n+1}{2}\Big) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m/2-n/2+1/2)}{\Gamma(m/2+n/2+3/2)}$$

で与えられるから

$$\int_{-1}^{1} P_n(\zeta)\zeta^m\, d\zeta = \begin{cases} 0 & m < n \\ \dfrac{m!\,\Gamma(m/2-n/2+1/2)}{2^n (m-n)!\,\Gamma(m/2+n/2+3/2)} & m-n : \text{偶数}\ (\geq 0) \\ 0 & m-n : \text{奇数}\ (\geq 0) \end{cases}$$

という結果を得る．次に (2.19) において $f(\zeta) = P_m(\zeta)$ の場合を考え，ルジャンドル多項式の直交関係を導く．

命題 2.5 ルジャンドル多項式 $P_n(\zeta)$ において

$$\int_{-1}^{1} P_n(\zeta) P_m(\zeta)\, d\zeta = 0 \qquad m \neq n \tag{2.20}$$

$$\int_{-1}^{1} {P_n}^2(\zeta)\, d\zeta = \frac{2}{2n+1} \tag{2.21}$$

が成り立つ．

証明： $P_m(\zeta)$ は m 次の多項式であるから

$$\frac{d^n P_m(\zeta)}{d\zeta^n} = 0 \qquad n > m$$

となる．よって

$$\int_{-1}^{1} P_n(\zeta)P_m(\zeta)\,d\zeta = 0 \qquad n > m$$

を得る．この等式の左辺は m, n について対象であるから結局

$$\int_{-1}^{1} P_n(\zeta)P_m(\zeta)\,d\zeta = 0 \qquad m \neq n$$

という $P_n(\zeta)$ と $P_m(\zeta)$ の直交性が導けた．次に $m = n$ のとき (2.18) から

$$\frac{d^n P_n(\zeta)}{d\zeta^n} = \frac{(2n)!}{2^n\,n!}$$

であるから (2.19) を用いると

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} {P_n}^2\,(\zeta)\,d\zeta &= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-\zeta^2)^n\,d\zeta = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}B(n+1,1/2)\\ &= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ &= \frac{2}{2n+1}\end{aligned}$$

が得られる． **（証明終わり）**

2.4 第一種ルジャンドル関数

ν が必ずしも正整数でないとし複素平面上で与えられたルジャンドルの微分方程式

$$\frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)\frac{df}{dz}\right\} + \nu(\nu+1)f = 0 \tag{2.22}$$

の解を求める．

命題 2.6

$$P_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{(m!)^2\Gamma(\nu+1-m)}\left(\frac{z-1}{2}\right)^m, \qquad |z-1| < 2 \tag{2.23}$$

で定義される関数は $|z-1| < 2$ で正則でルジャンドルの微分方程式を満たす．これを **第一種ルジャンドル関数** という．特に ν が自然数のときルジャンドル多項式に一致する．

証明： $z = 1 - 2t$ とおくと (2.22) は

$$t(1-t)\frac{d^2 f}{dt^2} + (1-2t)\frac{df}{dt} + \nu(\nu+1)f = 0$$

となる．この方程式の級数解を求めるために

$$f(t) = t^\alpha \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m$$

とおいて，微分方程式に代入し，t のべき係数を 0 とおけば

$$\begin{aligned}
&a_0\alpha^2 = 0 \\
&a_{m+1}(m+\alpha+1)^2 + a_m\big\{\nu(\nu+1) - (m+\alpha)(m+\alpha+1)\big\} = 0
\end{aligned}$$

を得る．$\alpha = 0$ とすると第二の等式から

$$a_{m+1} = -\frac{(\nu-m)(\nu+m+1)}{(m+1)^2}\, a_m$$

となり，係数 $a_1, a_2, \ldots$ が遂次 a_0 から求めることができる．$a_0 = 1$ とすれば

$$\begin{aligned}
f(t) = 1 - \nu(\nu+1)\, t &+ \frac{\nu(\nu+1)(\nu-1)(\nu+2)}{1^2 2^2}\, t^2 \\
&- \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu-1)(\nu-2)}{1^2 2^2 3^2}\, t^3 + \cdots
\end{aligned}$$

という級数解を得る．係数 a_m は

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{(-1)^m \nu(\nu+1)\cdots(\nu+m)(\nu-1)\cdots(\nu-m+1)}{(m!)^2} \\
&= \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \cdot \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu-1)} \cdot \frac{\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(\nu-m+1)} \\
&= \frac{(-1)^m \Gamma(\nu+m+1)}{(m!)^2 \Gamma(\nu-m+1)}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

であるから，$t = \dfrac{1-z}{2}$ と置き換えた関数

$$P_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{(m!)^2 \Gamma(\nu+1-m)} \Big(\frac{z-1}{2}\Big)^m$$

はルジャンドル微分方程式の解である．ダランベールの判定法から収束半径を求めると

$$\lim_{m\to\infty} \Big|\frac{a_m}{a_{m+1}}\Big| = \lim_{m\to\infty} \Big|\frac{(m+1)^2}{(\nu+m+1)(m-\nu-2)}\Big| = 1$$

となる．したがって，$P_\nu(z)$ は $|z-1| < 2$ で収束する．すなわち，中心が $z = 1$ で半径 2 の円の内部で (2.23) はルジャンドル微分方程式の解となる．　特に ν が自然数のとき，ルジャンドル微分方程式の多項式の解 $u(x)$ で境界条件 $u(1) = 0$ を満たすものは唯一であるから，$f(0) = 1$ と $P_n(1) = 1$ より f と P_n は同一の関数である．**（証明終わり）**

係数 a_m を表す式 (2.24) は

$$a_m = \frac{1}{(m!)^2}\, \frac{\Gamma(m+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\, \frac{\Gamma(m-\nu)}{\Gamma(-\nu)}$$

と表すことができるから

$$P_\nu(z) \;=\; P_{-\nu-1}(z) \tag{2.25}$$

という関係式を得る．

命題 2.7 ν が整数でないとき $P_\nu(z)$ は $z=-1$ において対数的特異点をもつ．

証明： $z=-1$ の近傍での解を求めるために (2.22) の微分方程式において $z=2t-1$ とおくと，命題 2.6 と同様にして一つの級数解

$$\begin{aligned} f(t) = 1 - \nu(\nu+1)\,t + \frac{\nu(\nu+1)(\nu-1)(\nu+2)}{1^2 2^2}\,t^2 \\ - \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu-1)(\nu-2)}{1^2 2^2 3^2}\,t^3 + \cdots \end{aligned}$$

を得る．指数決定式の二根 α_1, α_2 の差が 0 となるので $f_1(t)$ を $f(t)$ と独立な解とすると

$$f_1(t) = f(t)\log t + g(t), \qquad g(t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m t^m \quad (\ |z|<1 \text{ で正則})$$

となる.（微分方程式要論 (p100)：田代嘉宏著 [森北出版] 参照）．$f_1(\dfrac{z+1}{2})$ は $z \le -1$ を除き $|z+1|<2$ で正則な関数である．(2.23) のルジャンドル関数は $|z-1|<2$ で正則であるから，共通の領域 $\{z\ :\ |z-1|<2,\ |z+1|<2\}$ で $P_\nu(z)$ は f と f_1 の一次結合で表される．すなわち

$$P_\nu(z) = A\ f(\frac{z+1}{2}) + B\ f_1(\frac{z+1}{2})$$

であり，定数 A, B は領域内での関数値と微分係数を比較して求めることができる．この様にして得た関数は共通領域では (2.23) で与えられる関数と同一の値をもつ正則関数であるから，$|z+1|<2$ に解析接続すると

$$P_\nu(z) = A\ P_\nu(-z) + B\left\{P_\nu(-z)\log\frac{1+z}{2} + g(\frac{z+1}{2})\right\}, \quad |z+1|<2 \tag{2.26}$$

と表すことができる．ν が整数でないとき $B \neq 0$ である．なぜなら，$z=-1$ のとき

$$f(1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{(m!)^2\Gamma(\nu-m+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+\nu+1)\Gamma(m-\nu)}{(m!)^2\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu)}$$

となり，スターリングの公式（解析入門　(p339)：杉浦光夫著 [東京大学出版会] 参照）から

$$0 < \frac{M_\nu}{m} \le \frac{\Gamma(\nu+m+1)\Gamma(m-\nu)}{(m!)^2}, \qquad m \gg 1$$

となる M_ν が存在するので $f(1)$ は発散し，$P_\nu(z)$ は $z=-1$ をこめて正則に拡張できない．したがって，$B \neq 0$ である．(2.26) から整数でない ν の値に対して $z=-1$ におい

て対数的特異点をもつことになるが，ν が整数 n のときは $P_n(z)$ は多項式であるから特異点をもたない．すなわち $B=0$ である．さらに (2.15) より

$$P_n(z) = (-1)^n P_n(-z)$$

が成り立つ． **（証明終わり）**

2.5 第一種ルジャンドル関数の積分表示

$z-$ 平面上の単純閉曲線 C 上およびその内部で正則な関数 $f(z)$ の n 階微分 $f^{(n)}(z)$ は z が C の内部にあるとき

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}\,dt \quad n=0,1,2,\ldots \tag{2.27}$$

であるから，$f(z) = \dfrac{(z^2-1)^n}{2^n n!}$ とおくとロドリーグの公式から

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n 2\pi i}\int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}}\,dt \quad n=0,1,2,\ldots \tag{2.28}$$

を得る．これを **シュレーフリ (Schläfli) の積分** という．

(2.27) の形を使って n が正の整数でない一般の数 ν であるときの $P_\nu(z)$ を定義し，それがルジャンドルの微分方程式を満たすように考える．そこで

$$F(z) = \frac{1}{2^\nu 2\pi i}\int_C \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\,dt \tag{2.29}$$

とおくと

$$\frac{dF}{dz} = \frac{(\nu+1)}{2^\nu 2\pi i}\int_C \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+2}}\,dt, \quad \frac{d^2F}{dz^2} = \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2^\nu 2\pi i}\int_C \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+3}}\,dt$$

であるから，ルジャンドルの微分方程式に代入すると

$$\begin{aligned}&(1-z^2)\frac{d^2F}{dz^2} - 2z\frac{dF}{dz} + \nu(\nu+1)F\\ &= \frac{(\nu+1)}{2^\nu 2\pi i}\int_C \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+3}}(\nu t^2 - 2\nu tz + \nu + 2 - 2tz)\,dt = \frac{(\nu+1)}{2^\nu 2\pi i}\int_C \frac{d}{dt}\left[\frac{(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-z)^{\nu+2}}\right]dt\end{aligned}$$

となる．したがって積分路 C に沿って一周したとき関数 $\dfrac{(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-z)^{\nu+2}}$ がもとの値にもどれば (2.30) は微分方程式の解である．

ν が整数の場合には，積分路の両端で t が同じ値をとれば $\dfrac{(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-z)^{\nu+2}}$ は同じ値となり積分は 0 となる．ν が整数でない場合には，$\dfrac{(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-z)^{\nu+2}}$ は t の多価関数であるから，

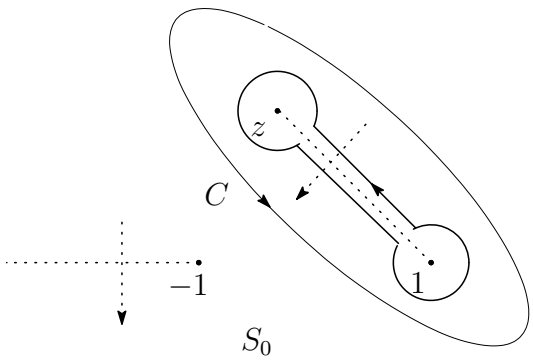

図 2.2:

t がもとの値に戻っただけでは積分が 0 となるとは限らない．この問題を解決するためには，(2.29) の積分路が Riemann 面の上で閉じていなければならない．ν を任意の複素数とすれば Riemann 面は無数の t 面からできており，$t = z,\ 1,\ \infty$ が分岐点である．t が実数で十分大きい値をとるとき $\arg \dfrac{t^2-1}{t-z} = 2n\pi$ となるような面を S_n と決める．図 2.2 に示すように，z と 1 とを結ぶ点線および -1 から負の実軸に沿って無限遠点に達する点線で次の面との接合をし，図の点線を横切る矢印の向きに進むとき S_n から S_{n+1} へ移るものとする．したがって，S_0 の上で z と 1 とを正の向きに一周し -1 の周りは周らないような路 C は Riemann 面上での閉曲線となり，$F(z)$ はルジャンドル微分方程式の解となる．

そこで，図 2.2 の積分路 C に沿って

$$P_\nu(z) = \frac{1}{2^\nu 2\pi i}\int_C \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\,dt \qquad \text{定義域は } (-\infty,-1] \text{ を除く複素平面} \tag{2.30}$$

と定義すれば，$P_\nu(z)$ はルジャンドル微分方程式の解である．

次に，(2.30) で表された $P_\nu(z)$ は (2.23) で表された第一種ルジャンドル関数に一致することを示す．

命題 2.8 $|z-1| < 2$ において

$$\frac{1}{2^\nu 2\pi i}\int_C \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\,dt \;=\; \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{(m!)^2\Gamma(\nu+1-m)}\Big(\frac{z-1}{2}\Big)^m \tag{2.31}$$

が成り立つ．但し，積分路 C は図 2.2 による．

証明： 図 2.2 の C を変形して，半径が $R < 2$ で中心が $t = 1$ にある円をとる．すなわち円周上では

$$t - 1 = Re^{i\theta}, \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

であり，$|z-1| < R$ とすれば

$$(t-z)^{-\nu-1} = (t-1)^{-\nu-1}\Big(1 - \frac{z-1}{t-1}\Big)^{-\nu-1}$$

$$= (t-1)^{-\nu-1}\Big\{1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{m!\,\Gamma(\nu+1)}\Big(\frac{z-1}{t-1}\Big)^m\Big\}$$

となって一様に収束する．したがって

$$\frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}} = (t+1)^\nu (t-1)^\nu (t-z)^{-\nu-1} = (t+1)^\nu (t-1)^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\frac{z-1}{t-1}\Big)^m \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{m!\,\Gamma(\nu+1)}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (t+1)^\nu (t-1)^{-m-1} \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{m!\Gamma(\nu+1)} (z-1)^m$$

また

$$(t+1)^\nu = 2^\nu \Big(1 + \frac{t-1}{2}\Big)^\nu = 2^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+1)}{2^r r!\,\Gamma(\nu+1-r)} \Big(\frac{t-1}{2}\Big)^r$$

と変形し項別積分すると

$$\int_C (t+1)^\nu (t-1)^{-m-1}\,dt = 2^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+1)}{2^r r!\,\Gamma(\nu+1-r)} \int_C (t-1)^{r-m-1}\,dt$$

$$= 2\pi i 2^{\nu-m} \frac{\Gamma(\nu+1)}{m!\,\Gamma(\nu+1-m)}$$

となる．故に

$$\frac{1}{2^\nu 2\pi i} \int_C \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\,dt \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{(m!)^2 \Gamma(\nu+1-m)} \Big(\frac{z-1}{2}\Big)^m, \qquad |z-1| < R < 2$$

を得る． **（証明終わり）**

2.6 第二種ルジャンドル関数

指数決定式 (2.16) において，$m = -n-1$ としてルジャンドル微分方程式の他の解を求めてみる．係数間の漸化式 (2.17) はそのまま成り立ち

$$a_{-n-3} = \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)2}\,a_{-n-1}, \quad a_{-n-5} = \frac{(n+3)(n+4)}{(2n+5)4}\,a_{-n-3}, \ldots$$

となり，一般に

$$a_{-n-(2k+1)} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+2k)}{(2n+3)(2n+5)\cdots(2n+2k+1)2^k k!} a_{-n-1}$$

と表すことができ，n が -1 より大であれば n が整数であるなしに関わらず係数は無限に続くから多項式とはならない．

n を一般の値 ν に置き換えてもこれまでの議論は成り立つから，微分方程式の解を $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_{-n-(2k+1)} z^{-n-(2k+1)}$ として，$a_{-\nu-1} = \dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+3/2)}$ とおいて得られる級数

$$Q_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1) z^{-\nu-1}}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+3/2)} \Big\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+2k)}{2^k k!\,(2\nu+3)(2\nu+5)\cdots(2\nu+2k+1)}\, z^{-2k} \Big\} \tag{2.32}$$

はルジャンドル微分方程式の解である．この級数解はダランベールの収束判定条件から $|z| > 1$ で収束する．この級数解を **第二種ルジャンドル関数** という．

第一種ルジャンドル関数の積分表示 (2.30) の考察からわかるように

$$T(z) = \frac{1}{2^{\nu+2}\, i\, \sin\nu\pi} \int_D \frac{(t^2-1)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}\, dt \tag{2.33}$$

も積分路 D を適当にとればルジャンドル微分方程式の解となる．しかし，この関数が $P_\nu(z)$ と独立であるためには積分路 D と C は異なったものでなければならない．図 2.3 が示すように，D として関数 $(t^2-1)^\nu(z-t)^{-\nu-2}$ の分岐点 $t=1$ を負の向き一周し，$t=-1$ を正の向きに一周する 8 の字形閉曲線をとり，$t=z$ がその外にあれば (2.34) はルジャンドル微分方程式の解となる．点 P において $\arg(t^2-1)=0$，0 において

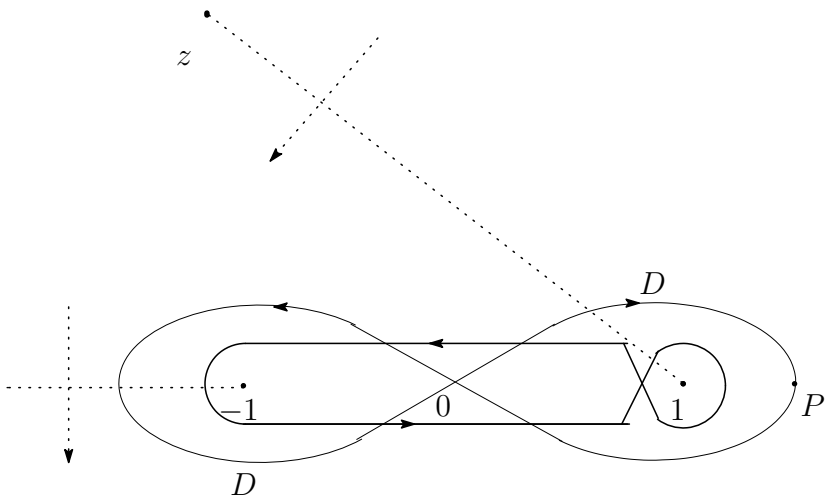

図 2.3:

$\arg(z-t) = \arg(z)$ ととるものとする．ここで被積分関数は t の多価関数であるが，$+1$ から実軸に沿って $-\infty$ まで切断を作った z 平面において正則でかつ一価である．したがって，積分路 D を図 2.3 のようにとり

$$Q_\nu(z) = \frac{1}{2^{\nu+2}\, i\, \sin\nu\pi} \int_D \frac{(t^2-1)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}\, dt \qquad \text{定義域は } (-\infty, 1] \text{ を除く複素平面} \tag{2.34}$$

定義すると，$Q_\nu(z)$ は $P_\nu(z)$ と一次独立なルジャンドル微分方程式の解である．

次に (2.34) で定義された $Q_\nu(z)$ が，$|z| > 1$ で第二種ルジャンドル関数 (2.32) と一致

することを示す.

命題 2.9 $|z|>1$ において

$$\frac{1}{2^{\nu+2}\ i\ \sin\nu\pi}\int_D \frac{(t^2-1)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}\,dt$$
$$= \frac{1}{2^{\nu+1}\ z^{\nu+1}}\Big\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+2k+1)\Gamma(k+1/2)}{(2k)!\,\Gamma(\nu+k+3/2)}\ z^{-2k}\Big\} \tag{2.35}$$

が成り立つ．但し，積分路 D は図 2.3 による．

証明： いま $\mathrm{Re}(\nu+1/2)>0$ と仮定し，図 2.3 の様に 8 の字形積分路を扁平にし，$t=0$ から実数軸の下側に沿って $t=1$ に到り，$t=1$ を負の方向に一周し，実数軸の上側に沿って $t=1$ から $t=0$ に到り，さらに $t=0$ から実数軸の上側に沿って $t=-1$ に到り，最後に $t=-1$ を正の方向に一周して $t=-1$ から実数軸の下側に沿って $t=0$ に帰るものとする．この様にとれば被積分関数の値は

$0\sim 1$	までは	$e^{i\nu\pi}\dfrac{(1-t^2)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}$
$1\sim 0$	までは	$e^{-i\nu\pi}\dfrac{(1-t^2)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}$
$0\sim -1$	までは	$e^{-i\nu\pi}\dfrac{(1-t^2)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}$
$-1\sim 0$	までは	$e^{i\nu\pi}\dfrac{(1-t^2)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}$

であり，$\mathrm{Re}(\nu+1/2)>0$ であるから ±1 のところの円の半径を無限に小さくしてその影響を除くことができる．したがって

$$\begin{aligned}
Q_\nu(z) &= \frac{1}{2^{\nu+2}\ i\ \sin\nu\pi}\Big\{(e^{i\nu\pi}-e^{-i\nu\pi})\int_0^1\frac{(1-t^2)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}\,dt \\
&\quad+\frac{1}{2^{\nu+2}\ i\ \sin\nu\pi}(e^{i\nu\pi}-e^{-i\nu\pi})\int_{-1}^0\frac{(1-t^2)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}\,dt\Big\} \\
&= \frac{1}{2^{\nu+2}\ i\ \sin\nu\pi}\Big\{e^{-i\nu\pi}\int_{-1}^1\frac{(1-t^2)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}\,dt - e^{i\nu\pi}\int_{-1}^1\frac{(1-t^2)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}\,dt\Big\} \\
&= 2^{-\nu-1}\int_{-1}^1(1-t^2)^\nu(z-t)^{-\nu-1}\,dt \qquad \mathrm{Re}(\nu+1/2)>0
\end{aligned}$$

を得る．ここで $|z|>1$ と仮定すると

$$(z-t)^{-\nu-1}=z^{-\nu-1}\Big\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+k+1)}{k!\,\Gamma(\nu+1)}\Big(\frac{t}{z}\Big)^k\Big\}$$

と級数展開でき，$-1\le t\le 1$ で一様収束するから項別積分をして

$$Q_\nu(z)=\frac{1}{2^{\nu+1}z^{\nu+1}}\Big\{\int_{-1}^1(1-t^2)^\nu\,dt+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+k+1)}{k!\,\Gamma(\nu+1)z^k}\int_{-1}^1 t^k(1-t^2)^\nu\,dt\Big\}$$

を得る．第二項の積分の計算は k が奇数ならば積分の値は 0，偶数ならば積分の値は $(0,1)$ 間の値の 2 倍となるから

$$\int_{-1}^{1} t^{2k}(1-t^2)^{\nu}\,dt = \frac{\Gamma(k+1/2)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+k+3/2)}$$

となる．故に

$$Q_\nu(z) = \frac{1}{2^{\nu+1}\,z^{\nu+1}}\Big\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+2k+1)\Gamma(k+1/2)}{(2k)!\,\Gamma(\nu+k+3/2)}\,z^{-2k}\Big\} \qquad |z|>1$$

となり (2.32) と一致する．この級数は ν には無関係に $|z|>1$ で収束し，また ν の解析関数である．したがって，解析接続により ν の値とは無関係に成り立つ．**（証明終わり）**

2.7 $|z|<1$ での第二種ルジャンドル関数

シュレーフリの積分表示 (2.30) の被積分関数を図 2.4 で示された径路に沿って積分する．

命題 2.10 第一種ルジャンドル関数の積分表示 (2.30) は

$$P_\nu(z) = \frac{e^{-\nu\pi i}}{4\pi 2^{\nu}\sin\nu\pi}\int^{(z+,1+,z-,1-)}\frac{(t^2-1)^{\nu}}{(t-z)^{\nu+1}}\,dt \tag{2.36}$$

と表すことができる．この積分路は図 2.4 に示されたものである．

証明：

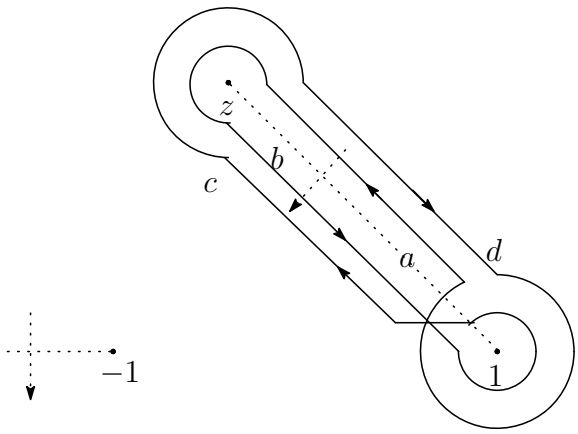

図 2.4: 積分路：(z+,1+,z-,1-)

d に沿っての積分では a に沿っての積分よりも被積分関数の偏角は $2\pi\nu$ だけ大きい．同じように，c に沿っての積分では b に沿っての積分よりも被積分関数の偏角は $2\pi\nu$ だ

け大きい．$-1 < \mathrm{Re}(\nu) < 0$ であれば $t = z, t = 1$ のまわりからの積分の寄与は 0 となしうるから

$$\begin{aligned}\int_a + \int_b + \int_c + \int_d &= (1 - e^{2\pi\nu i}) \int_a + (1 - e^{2\pi\nu i}) \int_b \\ &= (1 - e^{2\pi\nu i}) \int_{a+b} \\ &= -e^{\pi\nu i} 2i \ \sin\nu\pi \int_{a+b} \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\, dt\end{aligned}$$

となる．一方

$$P_\nu(z) = \frac{1}{2^\nu 2\pi i} \int_{a+b} \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\, dt$$

であるから

$$P_\nu(z) = \frac{e^{-\nu\pi i}}{4\pi 2^\nu \sin\nu\pi} \int_{a+b+c+d} \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\, dt$$

を得る．$P_\nu(z)$ は ν の正則な関数であるあるから，$-1 < \mathrm{Re}(\nu) < 0$ の制限のもとで得られた関係は，解析接続によりこの制限を取り除いても成り立つ．図 2.4 に示すように，点 z の周りを正の方向にまわり，次に点 1 のまわりを正の方向にまわり，さらに点 z を負の方向にまわり，最後に点 1 を負の方向にまわってもとにかえる積分路を $(z+, 1+, z-, 1-)$ で表すと

$$P_\nu(z) = \frac{e^{-\nu\pi i}}{4\pi 2^\nu \sin\nu\pi} \int^{(z+,1+,z-,1-)} \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\, dt$$

を得る．この積分路は図 2.4 に示されたものである． **（証明終わり）**

さて，$\dfrac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}$ を図 2.5 に示された三つの積分路に沿って積分をする．

命題 2.11 $|z+1| < 2$ において

$$\begin{aligned}&\int^{(z+,-1+,z-,-1-)} \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\, dt \\ &= e^{\pm\nu\pi i} 2^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(\nu+1)}{m!\Gamma(\nu+1-m)} \Big(\frac{z+1}{2}\Big)^m \int^{(1+,0+,1-,0-)} u^\nu (u-1)^{-\nu-1} u^m\, du\end{aligned} \tag{2.37}$$

が成り立つ．

証明： 図 2.5 に示すように点 A を区間 $(-1, 1)$ の実軸上にとり，$t-1$ の A における偏角は π とする．A から出発し $t = -1, t = 1, t = z$ を正の方向に回った積分の値をそれぞれ L, M, N とし，積分路 $(z+, 1+, z-, 1-)$，$(z+, -1+, z-, -1-)$ による積分を L，M，N をもちいて表すと

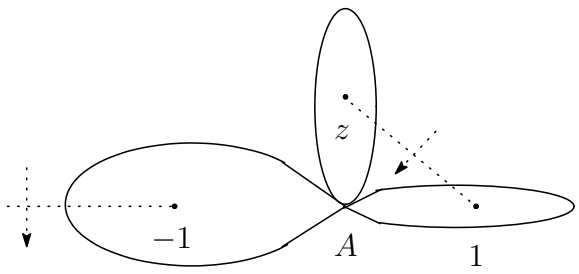

図 2.5:

$$\begin{cases} \displaystyle\int^{(z+,1+,z-,1-)} \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\,dt = N + Me^{-2\pi(\nu+1)i} - Ne^{2\pi\nu i} - M \\ \displaystyle\int^{(z+,-1+,z-,-1-)} \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\,dt = N + Le^{-2\pi(\nu+1)i} - Ne^{2\pi\nu i} - L \end{cases} \tag{2.38}$$

である．他方 $\displaystyle\int^{(-1+,1-)} \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\,dt$ の値を考えて, 被積分関数の偏角は (2.34) の $Q_\nu(z)$ と同様にとるとする．そうすると，$\mathrm{Im}(z) > 0$ であれば積分の値は $(L-M)e^{-2\pi\nu i}$, $\mathrm{Im}(z) < 0$ であれば $L-M$ である．したがって

$$\begin{aligned} &\int^{(-1+,1-)} \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\,dt \\ &= \frac{e^{-2\pi\nu i}}{1-e^{-2\pi\nu i}}\Big(\int^{(z+,1+,z-,1-)} - \int^{(z+,-1+,z-,-1-)}\Big)\frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\,dt, \quad \mathrm{Im}(z) > 0 \end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned} &\int^{(-1+,1-)} \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\,dt \\ &= \frac{1}{1-e^{-2\pi\nu i}}\Big(\int^{(z+,1+,z-,1-)} - \int^{(z+,-1+,z-,-1-)}\Big)\frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\,dt, \quad \mathrm{Im}(z) < 0 \end{aligned} \tag{2.40}$$

となる．これらの第一の積分は (2.36) により $P_\nu(z)$ を用いて表すことができる．

第二の積分 $\displaystyle\int^{(z+,-1+,z-,-1-)} \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\,dt$ について，$t+1 = (z+1)u$ と変数変換し，図 2.6 に示すように点 1 のまわりを正の方向にまわり，点 0 のまわりを正の方向にまわり，そして点 1 のまわりを負の方向にまわり，さらに点 0 のまわりを負の方向にまわってもとに戻る積分路を $(1+, 0+, 1-, 0-)$ で表すと

$$2^\nu \int^{(1+,0+,1-,0-)} u^\nu \Big(\frac{z+1}{2}\,u - 1\Big)^\nu (u-1)^{-\nu-1}\,du$$

となる．$\mathrm{Im}(z) \lesseqgtr 0$ のとき

$$\frac{z+1}{2}\,u - 1 = e^{\pm\pi i}\Big(1 - \frac{z+1}{2}\,u\Big)$$

に注意すると，いずれの場合も $1-(z+1)u/2$ の偏角は実軸上 $u=0$ で 0 であるから $(1-(z+1)u/2)^\nu$ をそのまま二項展開でき，$|(z+1)/2|<1$ において一様収束するから

$$\begin{aligned}&\int^{(z+,-1+,z-,-1-)} \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\,dt\\ &= e^{\pm\nu\pi i}2^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\Gamma(\nu+1)}{m!\Gamma(\nu+1-m)}\Big(\frac{z+1}{2}\Big)^m \int^{(1+,0+,1-,0-)} u^\nu(u-1)^{-\nu-1}u^m\,du\end{aligned}$$

を得る． **（証明終わり）**

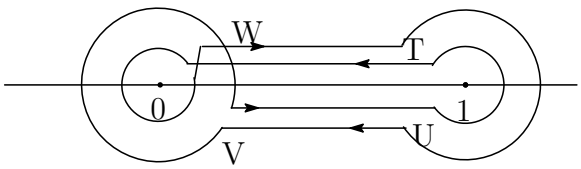

図 2.6: 積分路：(1+,0+,1-,0-)

命題 2.12 次の等式が成り立つ．

$$\int^{(1+,0+,1-,0-)} u^\nu(u-1)^{-\nu-1}u^m\,du = (-1)2^2\sin^2\nu\pi\; e^{\pi\nu i}\frac{\Gamma(\nu+m+1)\Gamma(-\nu)}{m!} \tag{2.41}$$

証明：

積分を計算するために積分路を図 2.6 で示す様に変形し $u-1=xe^{i\theta}$ とおくと，$-1<\mathrm{Re}(\nu)<0$ であれば $u=1$ と $u=0$ のまわりの円に沿っての積分は半径を無限に小さくした極限では 0 となる． に沿っては $\theta=\pi$， に沿っての積分の絶対値は等しく向きは反対で $2\pi(\nu+1)$ だけ偏角は大きいから

$$\begin{aligned}\int_{+} u^{\nu+m}(u-1)^{-\nu-1}\,du &= \Big(e^{\pi(\nu+1)i}-e^{-\pi(\nu+1)i}\Big)\int_0^1 (1-x)^{\nu+m}x^{-\nu-1}\,dx\\ &= -2i\;\sin\nu\pi\frac{\Gamma(\nu+m+1)\Gamma(-\nu)}{m!}\end{aligned}$$

となる． に沿っての積分は に沿ったものよりも偏角が $2\pi(\nu+m)$ だけ大きく，に沿っては よりも偏角が $2\pi(\nu+m)$ だけ大きい．したがって

$$\int_{+} u^{\nu+m}(u-1)^{-\nu-1}\,du = 2i\;e^{2\pi\nu i}\sin\nu\pi\frac{\Gamma(\nu+m+1)\Gamma(-\nu)}{m!}$$

となる．まとめて

$$\int_{+\;+\;+} u^{\nu+m}(u-1)^{-\nu-1}\,du = (-1)2^2\sin^2\nu\pi\; e^{\pi\nu i}\frac{\Gamma(\nu+m+1)\Gamma(-\nu)}{m!}$$

となる． **（証明終わり）**

以上のことから $|z|<1$ での第二種ルジャンドル関数の級数表示を得る．

命題 2.13 $|z-1|<2,\ |z+1|<2$ において第二種ルジャンドル関数は

$$Q_\nu(z)=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\Big\{e^{\mp\nu\pi i}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(\nu+m+1)}{(m!)^2\Gamma(\nu+1-m)}\Big(\frac{1-z}{2}\Big)^m - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(\nu+m+1)}{(m!)^2\Gamma(\nu+1-m)}\Big(\frac{1+z}{2}\Big)^m\Big\}$$

$$\mathrm{Im}(z)>0\text{ のとき }-\text{ 符号},\ \mathrm{Im}(z)<0\text{ のとき }+\text{ 符号} \tag{2.42}$$

と表すことができる．

証明：

$$\begin{aligned}
&\int^{(z+,-1+,z-,-1-)}(t^2-1)^\nu(t-z)^{-\nu-1}\,dt\\
&=2^\nu\int^{(1+,0+,1-,0-)}u^\nu\Big(\frac{z+1}{2}u-1\Big)^\nu(u-1)^{-\nu-1}\,du\\
&=e^{\pm\nu\pi i}2^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(\nu+1)}{m!\Gamma(\nu+1-m)}\Big(\frac{z+1}{2}\Big)^m\int^{(1+,0+,1-,0-)}u^\nu(u-1)^{-\nu-1}u^m\,du\\
&=2^{\nu+2}\pi e^{2\nu\pi i}\sin\nu\pi\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(\nu+m+1)}{(m!)^2\Gamma(\nu+1-m)}\Big(\frac{z+1}{2}\Big)^m\\
&\qquad(\mathrm{Im}(z)<0\text{ のとき }e^{2\nu\pi i}\text{は }1\text{ でおきかえる.})
\end{aligned}$$

を得る．両辺共に ν の値にかかわらず ν の正則関数であるから，この関係式は ν とは無関係に成り立つ．結局，(2.34) の $Q_\nu(z)$ の積分表示から $|z-1|<2,\ |z+1|<2$ において

$$\begin{aligned}
Q_\nu(z)&=\frac{1}{2^{\nu+2}\ i\ \sin\nu\pi}\int_D\frac{(t^2-1)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}\,dt\\
&=\frac{-e^{-\nu\pi i}}{2^{\nu+2}\ i\ \sin\nu\pi}\int^{(-1+,1-)}(t^2-1)^\nu(t-z)^{-\nu-1}\,dt\\
&=\frac{-e^{-3\nu\pi i}}{2^{\nu+2}\ i\ \sin\nu\pi(1-e^{-2\nu\pi i})}\Big\{e^{\nu\pi i}4\pi2^\nu\sin\nu\pi P_\nu(z)\\
&\qquad-2^{\nu+2}\pi e^{2\nu\pi i}\sin\nu\pi\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(\nu+m+1)}{(m!)^2\Gamma(\nu+1-m)}\Big(\frac{z+1}{2}\Big)^m\Big\}\\
&\quad(Im(z)<0\text{ のとき }e^{2\nu\pi i}\text{は }1\text{ でおきかえる.})
\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\Big\{e^{\mp\nu\pi i}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(\nu+m+1)}{(m!)^2\Gamma(\nu+1-m)}\Big(\frac{1-z}{2}\Big)^m$$
$$-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(\nu+m+1)}{(m!)^2\Gamma(\nu+1-m)}\Big(\frac{1+z}{2}\Big)^m\Big\}$$
$$\mathrm{Im}(z)>0\text{ のとき }-\text{ 符号},\ \mathrm{Im}(z)<0\text{ のとき }+\text{ 符号}$$

となる． **（証明終わり）**

ルジャンドルの微分方程式において，ν のかわりに $-\nu-1$ とおいても方程式は変わらない．よって $P_{-\nu-1}(z), Q_{-\nu-1}(z)$ もそれぞれ基本解である．四つの関数

$$P_\nu(z),\quad Q_\nu(z),\quad P_{-\nu-1}(z),\quad Q_{-\nu-1}(z)$$

の関係を調べてみる．

命題 2.14 $(-\infty,1]$ を除いた複素平面において

$$P_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\tan\nu\pi\big\{Q_\nu(z)-Q_{-\nu-1}(z)\big\} \tag{2.43}$$

が成り立つ．

証明：

(2.23) において ν のかわりに $-\nu-1$ とすると $|z-1|<2$ において

$$P_{-\nu-1}(z)=P_\nu(z) \tag{2.44}$$

を得る．しかし，$P_\nu(z)$ の積分表示 (2.30) で $|z-1|<2$ の領域外に解析接続したとき，$P_\nu(z)$ は z の正則関数であるので (2.44) は $P_\nu(z)$ の定義されるすべての z の値に対して成り立つ．

(2.42) で ν のかわりに $-\nu-1$ とおくと，第一の級数は $P_\nu(z)$ になる．第二の級数の係数は，第一の級数の係数と等しいから ν のかわりに $-\nu-1$ とおいても値は変わらない．よって

$$Q_{-\nu-1}(z)=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\Big\{e^{\mp(\nu+1)\pi i}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(\nu+m+1)}{(m!)^2\Gamma(\nu+1-m)}\Big(\frac{1-z}{2}\Big)^m$$
$$-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(\nu+m+1)}{(m!)^2\Gamma(\nu+1-m)}\Big(\frac{1+z}{2}\Big)^m\Big\}$$

が成り立つ．(2.42) とこの等式から第二の級数を消去して

$$\pi\cos\nu\pi P_\nu(z)=\sin\nu\pi\big\{Q_\nu(z)-Q_{-\nu-1}(z)\big\}$$

を得る．これは解析接続によって $(-\infty, 1]$ を除いた複素平面で成り立つ．ν が半整数のとき $Q_\nu(z) = Q_{-\nu-1}(z)$ となる．一般の ν に対しては

$$P_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \tan \nu\pi \big\{ Q_\nu(z) - Q_{-\nu-1}(z) \big\}$$

が成り立つ． **（証明終わり）**

$Q_\nu(z)$ の $|z| > 1$ での級数表示は (2.32) であるから，$|z| > 1$ での $P_\nu(z)$ の級数表示は

$$\begin{aligned} P_\nu(z) = & \frac{\tan \nu\pi \, \Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}(2z)^{\nu+1}\Gamma(\nu+3/2)} \\ & \Big\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+2k)}{2^k k!(2\nu+3)\cdots(2\nu+2k+1)} \Big(\frac{1}{z}\Big)^{2k} \Big\} \\ & + \frac{\Gamma(\nu+1/2)(2z)^\nu}{\Gamma(\nu+1)\sqrt{\pi}} \Big\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\nu)(-\nu+1)\cdots(-\nu+2k-1)}{2^k k!(-2\nu+1)\cdots(-2\nu+2k-1)} \Big(\frac{1}{z}\Big)^{2k} \Big\} \quad |z| > 1 \end{aligned} \tag{2.45}$$

となる．

2.8 ロンスキアンと漸化式

ルジャンドル関数のロンスキアンを求める．

命題 2.15 ルジャンドル関数のロンスキアンは

$$P_\nu(z) Q_\nu{}'(z) - P_\nu{}'(z) Q_\nu(z) = \frac{1}{1-z^2} \tag{2.46}$$

となる．

証明： ルジャンドルの微分方程式

$$\frac{d}{dz}\Big\{ (1-z^2)\frac{df}{dz} \Big\} + \nu(\nu+1) f = 0$$

の基本解が $P_\nu(z), Q_\nu(z)$ であるから

$$\frac{d}{dz}\Big\{ (1-z^2) P_\nu{}' \Big\} Q_\nu - \frac{d}{dz}\Big\{ (1-z^2) Q_\nu{}' \Big\} P_\nu = 0$$

を得る．これを変形して

$$\frac{d}{dz}\Big\{ P_\nu(z) Q_\nu{}'(z) - P_\nu{}'(z) Q_\nu(z) \Big\} = \frac{2z}{1-z^2}\Big\{ P_\nu(z) Q_\nu{}'(z) - P_\nu{}'(z) Q_\nu(z) \Big\}$$

となる．故に

$$P_\nu(z){Q_\nu}'(z) - {P_\nu}'(z)Q_\nu(z) = \frac{c}{1-z^2} \qquad c:\text{積分定数}$$

を得る． これはすべての z の値に対して成り立つから，$|z| \to \infty$ での挙動から定数 c を求めることができる．(2.45) から

$$P_\nu(z) \sim \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1)\sqrt{\pi}}\,(2z)^\nu \qquad |z| \gg 1$$

を得る．また (2.34) から

$$Q_\nu(z) \sim \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)\,(2z)^{\nu+1}} \qquad |z| \gg 1$$

を得る．これらより

$$P_\nu(z){Q_\nu}'(z) - {P_\nu}'(z)Q_\nu(z) \sim -\frac{(\nu+1/2)\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+3/2)}\,z^{-2}$$

となる．よって c の値は 1 でなければならない．以上のことから

$$P_\nu(z){Q_\nu}'(z) - {P_\nu}'(z)Q_\nu(z) = \frac{1}{1-z^2}$$

を得る． **（証明終わり）**

積分表示で与えられるルジャンドル関数の漸化式を考える．

命題 2.16 第二種ルジャンドル関数の漸化式

$$(\nu+1)Q_{\nu+1}(z) + \nu Q_{\nu-1}(z) = (2\nu+1)zQ_\nu(z) \tag{2.47}$$

が成り立つ．

証明： (2.35) で得られる $|z|>1$ での級数 $Q_\nu(z)$ の ν として $\nu+1$ を考え，両辺に $(\nu+1)$ を掛けると，

$$\begin{aligned}(\nu+1)Q_{\nu+1}(z) &= (\nu+1)\,2^{-\nu-2}z^{-\nu-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+2k+2)\Gamma(k+1/2)}{(2k)!\,\Gamma(\nu+k+5/2)}\,z^{-2k}\\ &= (\nu+1)\,2^{-\nu}z^{-\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+2k)\Gamma(k-1/2)}{4(2k-2)!\,\Gamma(\nu+k+3/2)}\,z^{-2k}\end{aligned}$$

となる．同様に ν として $\nu-1$ を考え，両辺に ν を掛けると

$$\nu Q_{\nu-1}(z) = \nu 2^{-\nu}z^{nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+2k)\Gamma(k+1/2)}{(2k)!\,\Gamma(\nu+k+1/2)}\,z^{-2k}$$

となる．よって

$$
\begin{aligned}
(\nu+1)Q_{\nu+1}(z)+\nu Q_{\nu-1}(z) \;=\; & 2^{-\nu}z^{-\nu}\Big\{\frac{\Gamma(\nu)\Gamma(1/2)\,\nu}{\Gamma(\nu+1/2)} \\
& +\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\nu\Gamma(\nu+2k)\Gamma(k+1/2)}{(2k)!\,\Gamma(\nu+k+1/2)}\,z^{-2k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\nu+1)\Gamma(\nu+2k)\Gamma(k-1/2)}{4(2k-2)!\,\Gamma(\nu+k+3/2)}\,z^{-2k}\Big\}
\end{aligned}
$$

となる．ここで

$$
\begin{aligned}
& \frac{\nu\Gamma(\nu+2k)\Gamma(k+1/2)}{(2k)!\,\Gamma(\nu+k+1/2)}+\frac{(\nu+1)\Gamma(\nu+2k)\Gamma(k-1/2)}{4(2k-2)!\,\Gamma(\nu+k+3/2)} \\
&=\frac{\Gamma(\nu+2k)\Gamma(k-1/2)}{\Gamma(\nu+k+1/2)(2k-2)!}\cdot\frac{(\nu+2k)(\nu+1/2)}{4k(\nu+k+1/2)} \\
&=\frac{(\nu+1/2)\Gamma(\nu+2k+1)\Gamma(k+1/2)}{(2k)!\,\Gamma(\nu+k+3/2)}
\end{aligned}
$$

であるから，結局

$$
(\nu+1)Q_{\nu+1}(z)+\nu Q_{\nu-1}(z)=(2\nu+1)zQ_{\nu}(z)
$$

を得る．この関係は $|z|>1$ で得られたが，積分表示 (2.34) で $|z|<1$ に解析接続してもそのまま成り立つ． **（証明終わり）**

命題 2.17 第二種ルジャンドル関数の漸化式

$$
{Q_{\nu+1}}'(z)-z{Q_{\nu}}'=(\nu+1)Q_{\nu}(z) \tag{2.48}
$$

$$
z{Q_{\nu}}'(z)-{Q_{\nu-1}}'(z)=\nu Q_{\nu}(z) \tag{2.49}
$$

が成り立つ．

証明： 命題 2.17 と同様にして

$$
\begin{aligned}
{Q_{\nu+1}}'(z)-z{Q_{\nu}}'(z) &= 2^{-\nu-1}\frac{(\nu+1)\Gamma(\nu+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(\nu+3/2)}\,z^{-\nu-1} \\
&\quad+2^{-\nu-1}\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\frac{(2k+\nu+1)\Gamma(2k+\nu+1)\Gamma(k+1/2)}{(2k)!\,\Gamma(\nu+k+3/2)} \\
&\quad-\frac{(\nu+2k)\Gamma(\nu+2k)\Gamma(k-1/2)}{2(2k-2)!\,\Gamma(\nu+k+3/2)}\Big\}\,z^{-2k-\nu-1} \\
&=2^{-\nu-1}\frac{(\nu+1)\Gamma(\nu+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(\nu+3/2)}\,z^{-\nu-1} \\
&\quad+2^{-\nu-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\nu+1)\Gamma(\nu+2k+1)\Gamma(k+1/2)}{(2k)!\,\Gamma(\nu+k+3/2)}\,z^{-2k-\nu-1}
\end{aligned}
$$

$$= (\nu+1)\Big\{2^{-\nu-1}z^{-\nu-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+2k+1)\Gamma(k+1/2)}{(2k)!\,\Gamma(\nu+k+3/2)}\ z^{-2k}\Big\}$$

であるから

$$Q_{\nu+1}{}'(z) - zQ_\nu{}' = (\nu+1)Q_\nu(z)$$

を得る．また，(2.47) と (2.48) から

$$zQ_\nu{}'(z) - Q_{\nu-1}{}'(z) = \nu Q_\nu(z)$$

を得る． **（証明終わり）**

次に第一種ルジャンドル関数 $P_\nu(z)$ の漸化式を求める．

命題 2.18 第一種ルジャンドル関数の漸化式

$$(\nu+1)P_{\nu+1}(z) + \nu P_{\nu-1}(z) = (2\nu+1)zP_\nu(z) \tag{2.50}$$

が成り立つ．

証明： (2.43) から

$$\begin{aligned}
&(\nu+1)P_{\nu+1}(z) + \nu P_{\nu-1}(z)\\
&= \frac{\nu+1}{\pi}\tan\nu\pi\big\{Q_{\nu+1}(z) - Q_{-\nu-2}(z)\big\} + \frac{\nu}{\pi}\tan\nu\pi\big\{Q_{\nu-1}(z) - Q_{-\nu}(z)\big\}\\
&= \frac{(2\nu+1)}{\pi}\tan(\nu\pi)\ zQ_\nu(z) - \frac{(2\nu+1)}{\pi}\tan(\nu\pi)\ zQ_{-\nu-1}(z)
\end{aligned}$$

であるから

$$(\nu+1)P_{\nu+1}(z) + \nu P_{\nu-1}(z) = (2\nu+1)zP_\nu(z)$$

を得る． **（証明終わり）**

同様にして

$$\begin{cases} zP_\nu{}'(z) - P_{\nu-1}{}'(z) = \nu P_\nu(z)\\ P_{\nu+1}{}'(z) - zP_\nu{}'(z) = (\nu+1)P_\nu(z)\end{cases} \tag{2.51}$$

を導くことができる．

漸化式をもちいて整数次の第二種ルジャンドル関数は逐次求めることができる．(2.32) において $\nu = 0$ とおくと

$$Q_0(z) = z^{-1}\Big\{1 + \frac{1}{3z^2} + \frac{1}{5z^4} + \frac{1}{7z^6} + \cdots\Big\} \qquad |z| > 1$$

であるが，これは

$$\frac{1}{2}\log\frac{z+1}{z-1} = \frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z^5} + \cdots \qquad |z| > 1$$

と同じ級数であるから

$$Q_0(z) = \frac{1}{2}\log\frac{z+1}{z-1} \qquad |z| > 1$$

と表される．また，$\nu = 1$ とおくと

$$Q_1(z) = \frac{1}{3z^2} + \frac{1}{5z^4} + \frac{1}{7z^6} + \cdots, \qquad |z| > 1$$

となるが，級数を比較して

$$Q_1(z) = \frac{z}{2}\log\frac{z+1}{z-1} - 1 \qquad |z| > 1$$

を得る．漸化式 (2.47) に代入して

$$Q_2(z) = \frac{1}{2}P_2(z)\log\frac{z+1}{z-1} - \frac{3}{2}z \qquad |z| > 1$$

を得る．こうして，二種ルジャンドル関数は逐次求めることができる．

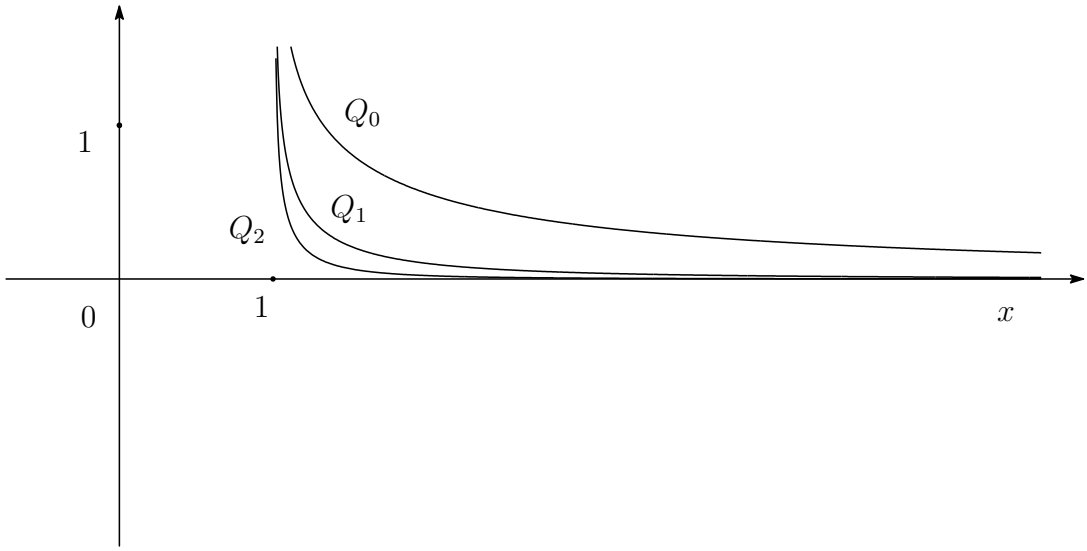

図 2.7:

2.9 ルジャンドル陪関数と漸化式

m が正整数で $-1 < x < 1$ のとき

$$P_\nu{}^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_\nu(x)}{dx^m}, \quad Q_\nu{}^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m Q_\nu(x)}{dx^m} \tag{2.52}$$

で定義される関数をルジャンドル陪関数という．ν の値は整数である必要はない．ここで，$v = \dfrac{d^m f}{dx^m}$ とし，ルジャンドルの微分方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2 f}{dx^2} - 2x\frac{df}{dx} + \nu(\nu+1)f = 0$$

を m 回微分すると，

$$(1-x^2)\frac{d^2v}{dx^2}-2(m+1)x\frac{dv}{dx}+(\nu-m)(\nu+m+1)v=0$$

を得る．更に $w=(1-x^2)^{m/2}\,v$ とおくと

$$(1-x^2)\frac{d^2w}{dx^2}-2x\frac{dw}{dx}+\Big\{\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\Big\}w=0 \tag{2.53}$$

を得る．これが ${P_\nu}^m(x), {Q_\nu}^m(x)$ の満たす微分方程式である．

命題 2.19 整数次のルジャンドル陪関数 ${P_n}^m(x), {P_r}^m(x)$ について

$$\int_{-1}^{1}{P_n}^m(x){P_r}^m(x)dx=0 \qquad r\neq n \tag{2.54}$$

が成り立つ．

証明： 整数次のルジャンドル陪関数 ${P_n}^m(x), {P_r}^m(x)$ について

$$\frac{d}{dx}\Big[(1-x^2)\Big\{{P_r}^m(x)\frac{d{P_n}^m(x)}{dx}-{P_n}^m(x)\frac{d{P_r}^m(x)}{dx}\Big\}\Big] \\ +\big\{n(n+1)-r(r+1)\big\}{P_n}^m(x){P_r}^m(x)=0$$

が成り立つから，x について積分をすると

$$\Big[(1-x^2)\Big\{{P_r}^m(x)\frac{d{P_n}^m(x)}{dx}-{P_n}^m(x)\frac{d{P_r}^m(x)}{dx}\Big\}\Big]_{x=-1}^{x=1} \\ =\big\{r(r+1)-n(n+1)\big\}\int_{-1}^{1}{P_n}^m(x){P_r}^m(x)dx$$

となる．${P_n}^m(x), {P_r}^m(x)$ とそれらの微分係数は $x=\pm1$ で有限確定値をもつから $r\neq n$ において左辺は 0 である．故に

$$\int_{-1}^{1}{P_n}^m(x){P_r}^m(x)dx=0 \qquad r\neq n$$

を得る． **（証明終わり）**

命題 2.20 ルジャンドル陪関数の漸化式

$$(2\nu+1)x{P_\nu}^m(x)=(\nu-m+1){P_{\nu+1}}^m(x)+(\nu+m){P_{\nu-1}}^m(x) \tag{2.55}$$

が成り立つ．

証明：漸化式 (2.51) より

$$P_{\nu+1}{}'(z) - P_{\nu-1}{}'(z) = (2\nu+1)P_\nu(z)$$

であるから

$$\begin{aligned}(2\nu+1)xP_\nu{}^m(x) &= (2\nu+1)(1-x^2)^{m/2}\Big\{\frac{d^m}{dx^m}(xP_\nu) - m\frac{d^{m-1}P_\nu}{dx^{m-1}}\Big\}\\ &= (1-x^2)^{m/2}\Big\{\frac{d^m}{dx^m}\big[(\nu+1)P_{\nu+1}+\nu P_{\nu-1}\big] - m\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\big[P_{\nu+1}{}' - P_{\nu-1}{}'\big]\Big\}\\ &= (1-x^2)^{m/2}\Big\{(\nu-m+1)\frac{d^mP_{\nu+1}}{dx^m} + (\nu+m)\frac{d^mP_{\nu-1}}{dx^m}\Big\}\end{aligned}$$

故に

$$(2\nu+1)xP_\nu{}^m(x) = (\nu-m+1)P_{\nu+1}{}^m(x) + (\nu+m)P_{\nu-1}{}^m(x)$$

を得る．**（証明終わり）**

同様にして

$$\begin{cases}P_{\nu-1}{}^m(x) = xP_\nu{}^m(x) - (\nu-m+1)\sqrt{1-x^2}\ P_\nu{}^{m-1}(x)\\ P_{\nu+1}{}^m(x) = xP_\nu{}^m(x) + (\nu+m)\sqrt{1-x^2}\ P_\nu{}^{m-1}(x)\\ \sqrt{1-x^2}\ P_\nu{}^{m+1}(x) = 2mxP_\nu{}^m(x) - (\nu+m)(\nu-m+1)\sqrt{1-x^2}\ P_\nu{}^{m-1}(x)\end{cases} \tag{2.56}$$

を得ることができる．

命題 2.21 整数次のルジャンドル陪関数 $P_n{}^m(x)$ について

$$\int_{-1}^{1}\big[P_n{}^m(x)\big]^2dx = \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \qquad (0\le m\le n) \tag{2.57}$$

が成り立つ．

証明：(2.55) で $\nu = n+1$ とおき，両辺に $P_n{}^m(x)$ をかけ積分すれば

$$\begin{aligned}&(n+m+1)\int_{-1}^{1}\big[P_n{}^m(x)\big]^2dx = (2n+3)\int_{-1}^{1}xP_{n+1}{}^m(x)P_n{}^m(x)\,dx\\ &= (2n+3)\int_{-1}^{1}P_{n+1}{}^m(x)\Big[\frac{1}{(2n+1)}\Big\{(n-m+1)P_{n+1}{}^m(x) + (n+m)P_{n-1}{}^m(x)\Big\}\Big]\,dx\\ &= \frac{(2n+3)(n-m+1)}{(2n+1)}\int_{1}^{1}\Big[P_{n+1}{}^m(x)\Big]^2dx\end{aligned}$$

を得る．これを繰り返し用いると

$$(2n+3)\int_{1}^{1}\Big[P_{n+1}{}^m(x)\Big]^2dx = \frac{(n+m+1)}{(n-m+1)}\,(2n+1)\int_{-1}^{1}\big[P_n{}^m(x)\big]^2dx$$

$$= \frac{(n+m+1)}{(n-m+1)}\frac{(n+m)}{(n-m)}\,(2n-1)\int_{-1}^{1}\left[{P_{n-1}}^{m}(x)\right]^2 dx$$

$$\cdots$$

$$= \frac{(n+m+1)(n+m)\cdots(2m+1)}{(n-m+1)!}\,(2m+1)\int_{-1}^{1}\left[{P_m}^{m}(x)\right]^2 dx$$

となる．ここでロドリーグの公式から $\dfrac{d^m P_m(x)}{dx^m} = \dfrac{(2m)!}{2^m\ m!}$ であるから

$$\int_{-1}^{1}\left[{P_m}^{m}(x)\right]^2 dx = \frac{\left[(2m)!\right]^2}{2^{2m}(m!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m\ dx$$

$$= \frac{\left[(2m)!\right]^2}{2^{2m}(m!)^2}\cdot 2\cdot 2^{2m}\frac{\left[\Gamma(m+1)\right]^2}{\Gamma(2m+2)} = \frac{2(2m)!}{2m+1}$$

を得る．したがって

$$(2n+3)\int_{-1}^{1}\left[{P_{n+1}}^{m}(x)\right]^2 dx = \frac{2(n+m+1)!}{(n-m+1)!}$$

となる．結局

$$\int_{-1}^{1}\left[{P_n}^{m}(x)\right]^2 dx = \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

という公式を得る． **（証明終わり）**

2.10 ルジャンドル陪関数の漸近形

整数次のルジャンドル陪関数 ${P_n}^m(x)$ を考える．シュレーフリの積分表示より

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n 2\pi i}\int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}\ dt$$

であり，グルサの定理によって

$${P_n}^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{(n+m)!}{2^n 2\pi i\ n!}\int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+m+1}}\ dt$$

である．C として中心が x，半径が $\sqrt{(1-x^2)}$ である円をとると，x は C の内部にあり x の符号により 1 又は -1 のどちらか一方のみを C の内部にもち C が満たすべき条件を備えている．このとき

$$t - x = \sqrt{1-x^2}\ e^{i\phi} \qquad 0 \le \phi < 2\pi$$

と表すと

$${P_n}^m(x) = \frac{(n+m)!}{2\pi\ n!}\int_0^{2\pi}(x+\sqrt{1-x^2}\ i\ \sin\phi)^n e^{-im\phi}\ d\phi$$

となる．被積分関数は ϕ の周期関数であるから，積分の下限，上限を $0,\ 2\pi$ から $\pi/2,\ 5\pi/2$ にしても積分の値は変わらない．よって

$$P_n{}^m(x) = \frac{(n+m)!\ e^{-m\pi i/2}}{2\pi\ n!}\int_0^{2\pi}(x+\sqrt{1-x^2}\ i\ \cos\phi)^n e^{-im\phi}\ d\phi \tag{2.58}$$

と表すことができる．これを **ラプラス (Laplace) の積分** という．$-1 \le x \le 1$ であるから $x = \cos\theta$ となる x と θ は 1 対 1 に対応するから

$$P_n{}^m(\cos\theta) = \frac{(n+m)!\ e^{-m\pi i/2}}{2\pi\ n!}\int_0^{2\pi}(\cos\theta + i\ \sin\theta\cos\phi)^n e^{-im\phi}\ d\phi \tag{2.59}$$

とも表すことができる．(2.58) において $t = e^{i\phi}$ とおき，原点を中心とする単位円を D であらわせば

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}(\cos\theta + i\ \sin\theta\cos\phi)^n e^{-im\phi}\ d\phi &= \frac{1}{i}\int_D\Big[\cos\theta + \frac{i}{2}\sin\theta\Big(t+\frac{1}{t}\Big)\Big]^n t^{-m-1}\ dt \\ &= \frac{1}{i}\int_D e^{n\phi(t)}\ dt \\ \text{但し } n\ \phi(t) &= \log\Big[\Big\{\cos\theta + \frac{i}{2}\sin\theta\Big(t+\frac{1}{t}\Big)\Big\}^n t^{-(m+1)}\Big]\end{aligned}$$

となる．$n \to \infty$ のときの漸近形を求めるために鞍点法を用いる．まず，

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\frac{i}{2}\sin\theta\cdot(1-\frac{1}{t^2})}{\cos\theta + \frac{i}{2}\sin\theta\cdot(1+\frac{1}{t})} - \frac{m+1}{n}\ \frac{1}{t}$$

であるから $m \ll n$ とすれば $t = \pm 1$ で鞍点をもつ．(1.59) を用いて計算すると

$$\begin{aligned}&\frac{1}{i}\ e^{n\phi(1)}\Big[\frac{-2\pi}{n\phi''(1)}\Big]^{1/2} + \frac{1}{i}\ e^{n\phi(-1)}\Big[\frac{-2\pi}{n\phi''(-1)}\Big]^{1/2} \\ &\qquad = \frac{1}{i}(\cos\theta + i\ \sin\theta)^n\Big[\frac{-2\pi(\cos\theta + i\ \sin\theta)}{ni\ \sin\theta}\Big]^{1/2} \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{i}\ (\cos\theta - i\ \sin\theta)^n\Big[\frac{2\pi(\cos\theta - i\ \sin\theta)}{ni\ \sin\theta}\Big]^{1/2} e^{\pi i(m+1)} \\ &\qquad = 2\Big(\frac{2\pi}{n\ \sin\theta}\Big)^{1/2}\cos\Big[(n+\frac{1}{2})\theta - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\Big]\ e^{m\pi i/2}\end{aligned}$$

である．$m \ll n$ のとき近似的に $(m+n)! \fallingdotseq n!\ n^m$ であるから

$$P_n{}^m(\cos\theta) \sim n^m\Big(\frac{2}{n\pi\sin\theta}\Big)^{1/2}\cos\Big[(n+\frac{1}{2})\theta - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\Big], \quad n \to \infty \tag{2.60}$$

という漸近形が得られる．

2.11 ν についての $P_\nu(\cos\theta) = 0$ の解

ルジャンドル関数の級数表示 (2.23) から

$$P_{-1/2+i\sigma}(\cos\theta) = 1 + \frac{1/4+\sigma^2}{(1!)^2}\ \sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{(1/4+\sigma^2)(9/4+\sigma^4)}{(2!)^2}\ \sin^4\frac{\theta}{2} + \cdots \tag{2.61}$$

となり，特に $P_{-1/2+i\sigma}(\cos\theta) \neq 0 \quad (\sigma\ :\ 実数)$ である．また $\sigma = ix \quad (x : 実数)$ とすると

$$P_{-1/2-x}(\cos\theta) = 1 + \frac{1/4 - x^2}{(1!)^2}\ \sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{(1/4-x^2)(9/4-x^4)}{(2!)^2}\ \sin^4\frac{\theta}{2} + \cdots$$

となり，$x^2 \leq 1/4$ である限り各項は 0 以上であるから $P_{-1/2-x}(\cos\theta)$ は 0 にはならない．よって $P_s(\cos\theta) = 0$ は $-1 \leq s \leq 0$ に根をもたない．更に次の命題が成り立つ．

命題 2.22 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ と θ を固定したとき，ν についての超越方程式 $P_\nu(\cos\theta) = 0$ の解はすべて実数である

証明： ルジャンドルの微分方程式 (2.14) より

$$\frac{d}{d\zeta}\Big\{(1-\zeta^2)\Big(P_{\nu'}\frac{dP_\nu}{d\zeta} - P_\nu\frac{dP_{\nu'}}{d\zeta}\Big)\Big\} = \Big\{\nu'(\nu'+1) - \nu(\nu+1)\Big\}P_{\nu'}P_\nu$$

であるから, これを $\zeta = \cos\theta$ から $\zeta = 1$ まで積分すると

$$\begin{aligned}(\nu'-\nu)(\nu'+\nu+1)&\int_{\cos\theta}^{1} P_{\nu'}(\zeta)P_\nu(\zeta)\,d\zeta \\ &= \sin^2\theta\Big\{P_\nu(\cos\theta)P_{\nu'}{}'(\cos\theta) - P_{\nu'}(\cos\theta)P_\nu{}'(\cos\theta)\Big\} \qquad (2.62)\end{aligned}$$

を得る．いま超越方程式 $P_\nu(\cos\theta) = 0$ の根 ν が実数でないとすると，(2.23) より $\overline{P_\nu(\cos\theta)} = P_{\overline{\nu}}(\cos\theta)$ であるから ν の共役な複素数 ν' も超越方程式 $P_\nu(\cos\theta) = 0$ の根である．等式 (2.62) に代入すると右辺は 0 となるから

$$\nu' + \nu + 1 = 0 \qquad 又は \qquad \int_{\cos\theta}^{1} P_{\nu'}(\zeta)P_\nu(\zeta)\,d\zeta = 0$$

を得る．ν と ν' は互いに共役であるから $P_{\nu'}(\zeta)P_\nu(\zeta)$ は非負となり

$$\int_{\cos\theta}^{1} P_{\nu'}(\zeta)P_\nu(\zeta)\,d\zeta > 0$$

となる．したがって $\nu' + \nu + 1 = 0$ を導くが，ν と ν' は互いに共役であるから $Re(\nu) = -1/2$ となる．しかし (2.61) から σ がどのような実数値をとろうが $P_{-1/2+i\sigma}(\cos\theta)$ は 0 とはならない．これは ν が超越方程式 $P_\nu(\cos\theta) = 0$ の根としたことに矛盾する．ゆえに ν は実数である． **（証明終わり）**

同様にして超越方程式

$$P_\nu{}^m(\cos\theta) = 0 \qquad m : 正整数$$

の根もすべて実数であることを示すことができる．

次に超越方程式の根の個数について考える．(2.60) で示したルジャンドル関数の漸近形の n(整数) を複素数に拡張して

$$P_\nu{}^m(\cos\theta) \sim \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu+1)}\Big(\frac{2}{\nu\pi\sin\theta}\Big)^{1/2}\cos\Big[\big(\nu+\frac{1}{2}\big)\theta - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\Big]$$

$$\left|\arg(\nu)\right| \leq \pi - \epsilon, \quad \epsilon > 0 \tag{2.63}$$

となることが知られている．したがって，ν が実数軸に沿って増加するとき $(0, \infty)$ で無限回符号を変える．よって超越方程式 ${P_\nu}^m(\cos\theta) = 0$ は無限個の実数の根をもっている．

第3章　完全直交系について

内積の定義されているバナッハ空間をヒルベルト空間という．内積という概念が入ることにより，直交という概念が定義できる．可分なヒルベルト空間の場合，完全正規直交系があって，どんな元もこの完全正規直交系の無限個の一次結合で表されることが示される．尚，この章は，増田久弥著：関数解析（裳華房）を参考にしまとめた．

3.1　$L^p(\Omega)$

p を $1 \leq p < \infty$ を満たす実数とする．R^n の開集合 Ω 上の可測関数 u 全体に対して，ノルムが

$$\| u \|_{L^p} \equiv \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \tag{3.1}$$

を満たすもの全体を $L^p(\Omega)$ と表す．但し，$u = v \quad (a.e.)$ となる u と v は同一視するものとする．また，$L^p(\Omega)$ が線形なノルム空間である．このとき次の二つの不等式が成り立つ．

命題 3.1 (ヘルダー (H öldder) の不等式) $1 < p < \infty$ に対して $q^{-1} = 1 - p^{-1}$ とすると

$$\left| \int_\Omega u(x)v(x)\, dx \right| \leq \| u \|_{L^p} \| v \|_{L^q} \qquad u \in L^p(\Omega), \quad v \in L^q(\Omega) \tag{3.2}$$

が成り立つ．

証明： まず $\| u \|_{L^p} = 0$ 又は $\| u \|_{L^q} = 0$ ならば明らかに成り立つ．したがって $\| u \|_{L^p} \neq 0$ かつ $\| u \|_{L^q} \neq 0$ とする．そして

$$a,\ b \geq 0 \Longrightarrow ab \leq p^{-1}\, a^p + q^{-1}\, b^q \tag{3.3}$$

が成り立つから，

$$a = |u(x)| \ / \ \| u \|_{L^p}, \qquad b = |v(x)| \ / \ \| v \|_{L^q}$$

とおくと

$$\frac{|u(x)|\,|v(x)|}{\| u \|_{L^p} \| u \|_{L^q}} \leq \frac{1}{p} \frac{|u(x)|^p}{\| u \|_{L^p}^p} + \frac{1}{q} \frac{|v(x)|^q}{\| v \|_{L^q}^q}$$

$$\int_\Omega \frac{|u(x)|\,|v(x)|}{\parallel u \parallel_{L^p} \parallel u \parallel_{L^q}}\,dx \le \frac{1}{p}\,\frac{1}{\parallel u \parallel_{L^p}^p}\int_\Omega |u(x)|^p\,dx + \frac{1}{q}\,\frac{1}{\parallel u \parallel_{L^q}^q}\int_\Omega |v(x)|^q\,dx = 1$$

となり，これから示すべき不等式を容易に得る． **（証明終わり）**

命題 3.2 (ミンコフスキー (Minkowski) の不等式) $1 \le p < \infty$ のとき

$$u,\ v \in L^p(\Omega) \qquad \text{ならば} \qquad u + v \in L^p(\Omega)$$

であり

$$\Big(\int_\Omega \Big|u(x)+v(x)\Big|^p\,dx\Big)^{1/p} \le \Big(\int_\Omega \Big|u(x)\Big|^p\,dx\Big)^{1/p} + \Big(\int_\Omega \Big|v(x)\Big|^p\,dx\Big)^{1/p} \tag{3.4}$$

が成り立つ．

証明： $p = 1$ のときは明らかであるから $p > 1$ とする．
さて不等式

$$(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p) \qquad (a, b \ge 0)$$

を用いると

$$|u(x)+v(x)|^p \le \Big(|u(x)| + |v(x)|\Big)^p \le 2^{p-1}\Big(|u(x)|^p + |v(x)|^p\Big)$$

であるから　$u + v \in L^p(\Omega)$ を得る．また

$$\int_\Omega \Big|u(x)+v(x)\Big|^p\,dx \le \int_\Omega \Big|u(x)+v(x)\Big|^{p-1}\Big|u(x)\Big|\,dx + \int_\Omega \Big|u(x)+v(x)\Big|^{p-1}\Big|v(x)\Big|\,dx$$

であるから　$p^{-1} + q^{-1} = 1$ であれば $q = p/(p-1)$ であるから

$$|u+v|^{p-1} \in L^q(\Omega)$$

である．ここでヘルダーの不等式を用いて

$$\int_\Omega \Big|u(x)+v(x)\Big|^{p-1}\Big|u(x)\Big|\,dx \le \Big(\int_\Omega \Big|u(x)+v(x)\Big|^{(p-1)q}\,dx\Big)^{1/q}\Big(\int_\Omega \Big|u(x)\Big|^p\,dx\Big)^{1/p}$$
$$\int_\Omega \Big|u(x)+v(x)\Big|^{p-1}\Big|v(x)\Big|\,dx \le \Big(\int_\Omega \Big|u(x)+v(x)\Big|^{(p-1)q}\,dx\Big)^{1/q}\Big(\int_\Omega \Big|v(x)\Big|^p\,dx\Big)^{1/p}$$

となるから

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big|u(x)+v(x)\Big|^p\,dx &\le \Big(\int_\Omega \Big|u(x)+v(x)\Big|^p\,dx\Big)^{1/q} \\ &\qquad \times \Big[\Big(\int_\Omega \Big|u(x)\Big|^p\,dx\Big)^{1/p} + \Big(\int_\Omega \Big|v(x)\Big|^p\,dx\Big)^{1/p}\Big]\end{aligned}$$

が成り立つ．$\displaystyle\int_\Omega \Big|u(x)+v(x)\Big|^p dx \neq 0$ なら両辺を $\displaystyle\Big(\int_\Omega \Big|u(x)+v(x)\Big|^p dx\Big)^{1/q}$ で割ると求める不等式を得る．また $\displaystyle\int_\Omega \Big|u(x)+v(x)\Big|^p dx = 0$ なら明らかである． **（証明終わり）**

これらの不等式を用いて次の定理が導かれる．

定理 3.1 $L^p(\Omega)$ はノルム $\| u \|_{L^p}$ によって完備なノルム空間（**バナッハ空間**）となる．

証明：

$L^p(\Omega)$ **がノルム空間であること**

$L^p(\Omega)$ が線形空間であることは，命題 3.2 より

$$|u(x)+v(x)|^p \leq \Big(|u(x)|+|v(x)|\Big)^p \leq 2^{p-1}\Big(|u(x)|^p+|v(x)|^p\Big)$$

より，$u+v \in L^p(\Omega)$ となり容易に理解できる．また，$\| u \|_{L^p}$ がノルムの条件を満たすことは明らかである．

したがって完備であることについて示せばよい．

$\{u_n\}$ **をコーシー列とすると，部分列** $\{n_{n_k}\}$ **を**

$$\| u_{n_{k+1}} - u_{n_k} \|_{L^p} < \frac{1}{2^k} \qquad (k=1,2,\dots)$$

となるように選ぶことができる．

実際

$$n,m > n_1 \quad \text{ならば} \quad \| u_n - u_m \|_{L^p} < \frac{1}{2}$$

となる n_1 が存在する．同様にして

$$n,m > n_2 \quad \text{ならば} \quad \| u_n - u_m \|_{L^p} < \frac{1}{2^2}$$

となる $n_2(>n_1)$ が存在する．この様にして $n_1, n_2, \dots$ を選ぶと $\{u_{n_k}\}$ が求める部分列である．簡単のため $v_k = u_{n_k}$ と書くと

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| v_{k+1} - v_k \|_{L^p} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \tag{3.5}$$

が成り立つ．

次に g_n **を**

$$\begin{cases} g_1(x) &= |v_1(x)| \qquad x \in \Omega \\ g_n(x) &= |v_1(x)| + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| \qquad n \geq 2, \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{3.6}$$

と定めると $g \in L^p(\Omega)$ **である．**

このとき

$$g_n(x)^p \geq 0, \qquad g_n(x)^p \leq g_{n+1}(x)^p, \qquad g_n(x) \geq |v_n(x)|$$

を得る．よって $\{g_n(x)^p\}$ は単調増加で，∞ も含めて考えると収束する．また

$$\int_\Omega g_n(x)^p\,dx = \| g_n \|_{L^p}^p \leq \Big(\| v_1 \|_{L^p} + \sum_{k=1}^{n-1} \| v_{k+1} - v_k \|_{L^p} \Big)^p \leq \Big(\| v_1 \|_{L^p} + 1 \Big)^p$$

が成り立つ．したがって，$g_n(x)$ は Ω のほとんどいたるところで有限な値に単調に収束する．よって

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) \qquad a.e.\ x \in \Omega$$

とおくと

$$\int_\Omega g(x)^p\,dx \leq \Big(\| v_1 \|_{L^p} + 1 \Big)^p$$

となり $g \in L^p(\Omega)$ である．

次に $\{v_k\}$ が収束しすることを示す．

$k < m$ とすると

$$\Big| v_m(x) - v_k(x) \Big| \leq \sum_{j=k}^{m-1} \Big| v_{j+1}(x) - v_j(x) \Big| = g_m(x) - g_k(x) \tag{3.7}$$

となる．$\{g_m(x)\}$ はほとんど至るところの点 $x \in \Omega$ で収束するから

$$\lim_{m,k\to\infty} \Big| v_m(x) - v_k(x) \Big| = 0$$

となる．よって

$$\lim_{n\to\infty} v_n(x) = u^*(x) \qquad a.e.\ x \in \Omega$$

となる u^* が存在する．

更に $u^* \in L^p(\Omega)$ である．

(3.7) で $k = 1$ とおくと $g_1(x) \geq 0$ より

$$|v_m(x)| \leq |v_1(x)| + g_m(x)$$

となり，$m \to \infty$ とすれば

$$|u^*(x)| \leq |v_1(x)| + g(x)$$

となり，$v_1, g \in L^p(\Omega)$ であるから $u^* \in L^p(\Omega)$ を得る．

完備性について

$$\Big| v_k(x) - u^*(x) \Big|^p \leq \Big(|v_k(x)| + |u^*(x)| \Big)^p$$

$$\leq \Big(g_k(x) + |u^*(x)|\Big)^p$$
$$\leq \Big(g(x) + |u^*(x)|\Big)^p \leq 2^{p-1}\Big\{(g_k(x))^p + |u^*(x)|^p\Big\}$$

であるから

$$\Big|v_k(x) - u^*(x)\Big|^p$$

は Ω 上 k によらない可積分関数

$$2^{p-1}\Big\{(g_k(x))^p + |u^*(x)|^p\Big\}$$

でおさえられる．また，

$$\Big|v_k(x) - u^*(x)\Big|^p \to 0 \quad (k \to \infty)$$

であるから

$$\| v_k - u^* \|_{L^p} \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

となる．いま $\{u_n\}$ はコーシー列より任意の $\epsilon > 0$ に対して N が存在して

$$n, n_k > N \Longrightarrow \| u_n - u_{n_k} \| = \| u_n - v_k \| < \epsilon$$

となり $k \to \infty$ とすると $\| u_n - u^* \| < \epsilon$ となるから，結局

$$\| u_n - u^* \|_{L^p} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

を得る． **（証明終わり）**

3.2 ヒルベルト空間

複素数体 C 上の線形空間 X の 2 点 x, y に対して，複素数 (x, y) が対応して，次の 1) ～ 3) が満たされるとき (x, y) を内積と呼ぶ．

1) $(x, x) \geq 0$ 　特に　$(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$
3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) \qquad (\alpha\, x, y) = \alpha\, (x, y) \quad \alpha \in C$

線形空間 X に内積が定義されているとき X を **プレ・ヒルベルト空間**（内積空間）という．内積の定義から

$$(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$$

$$(x, \alpha\, y) = \overline{\alpha}\,(x, y)$$

が成り立ち，一般化すると任意の $\alpha_j,\ \beta_j \in C$ と $x_j,\ y_j \in X\ (j = 1, 2, \ldots, n)$ に対して

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, x_j, \sum_{k=1}^{n} \beta_k\, y_k\Big) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_j\, \overline{\beta_k}\,(x_j, y_k)$$

が成り立つ.

定理 3.2 プレ・ヒルベルト空間 X の各元 x に対して

$$\| x \| = (x, x)^{1/2}$$

と定めると X はノルム空間となる.

証明： ノルム空間であるための条件は

1) $\| x \| \geq 0$　　2) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3) $\| \alpha x \| = |\alpha|\ \| x \|\quad (\alpha \in C)$　　4) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

であるが 1) ∼ 3) については明らかである.
4) を示すためにシュワルツの不等式

$$|(x, y)| \leq \| x \| \| y \|$$

を示す.

まず $(x, y) = 0$ のときは明らか.
$(x, y) \neq 0$ のとき

$$\alpha = -(x, y)\ /\ \ \| y \|^2$$

とおくと

$$\begin{aligned} 0 \leq (x + \alpha\, y, x + \alpha\, y) &= \| x \|^2 + \alpha\,(y, x) + \overline{\alpha}\,(x, y) + |\alpha|^2 \| y \|^2 \\ &= \| x \|^2 - |(x, y)|^2 / \| y \|^2 \\ &\text{ゆえに}\quad |(x, y)| \leq \| x \| \| y \| \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} \| x + y \|^2 &= (x + y, x + y) \\ &= \| x \|^2 + (x, y) + (y, x) + \| y \|^2 \\ &\leq \| x \|^2 + 2 \| x \| \| y \| + \| y \|^2 = (\ \| x \| + \| y \|\ )^2 \end{aligned}$$

となり両辺の平方根をとれば 4) を得る． **（証明終わり）**

内積の連続性について

次にシュワルツの不等式を用いて内積が連続関数であることを示す．簡単な計算から

$$(x_n, y_n) - (x, y) = (x_n - x,\ y_n - y) + (x_n - x,\ y) + (x,\ y_n - y)$$

が成り立ち，シュワルツの不等式より

$$|\ (x_n - x,\ y_n - y)\ | \leq \|\ x_n - x\ \|\ \|\ y_n - y\ \|$$

であるから，

$$x_n \to x, \qquad y_n \to y$$

とすると

$$\|\ x_n - x\ \| \to 0, \qquad \|\ y_n - y\ \| \to 0$$

である．したがって

$$(x_n - x,\ y_n - y) \to 0$$

を得る．$(x_n - x,\ y)$, $(x,\ y_n - y)$ についても同様にでき $(x_n, y_n) \to (x, y)$ を得る．よって内積は連続関数である．

さてプレ・ヒルベルト空間 X は内積からノルムが定められノルム空間となるが，そのノルムに関して完備なとき X は **ヒルベルト空間** という．例として Ω を R^n の開集合とし，$u, v \in L^2(\Omega)$ に対し

$$(u, v) = \int_\Omega u(t)\ \overline{v(t)}\ dt \tag{3.8}$$

と定めると $L^2(\Omega)$ はヒルベルト空間である．

3.3 射影定理・正規直交系

ヒルベルト空間 X の二つの部分集合 A, B が互いに直交するとは

$$x \in A, \quad y \in B \qquad \text{に対して} \qquad (x, y) = 0$$

と定める．このとき $A \perp B$ と表す．また，X の部分集合 L に直交する要素全体を $L^\perp$ と表し L の **直交補空間** という．すなわち

$$L^\perp = \{x \in X;\ x \perp L\}$$

である．

$L^\perp$ は X の閉部分空間になる．

なぜなら $\alpha, \beta \in C$, $x, y \in L^\perp$ に対して

$$(\alpha x + \beta y,\ L) = \alpha\ (x, L) + \beta\ (y, L) = 0 \qquad \text{ゆえに} \quad \alpha x + \beta y \in L^\perp$$

よって $L^{\perp}$ は X の部分空間である．また

$$u_n \in L^{\perp}, \qquad u_n \Longrightarrow u \in X$$

とすると

$$(u, L) = \lim_{n\to\infty}(u_n, L) = 0 \qquad \text{ゆえに} \quad u \in L^{\perp}$$

よって $L^{\perp}$ は閉集合であり以上のことから閉部分空間である．

定理 3.3 (射影定理) X をヒルベルト空間とし，L を X の閉部分空間とする．このとき，任意の $x \in X$ は

$$x = y + z \qquad y \in L \quad z \in L^{\perp}$$

と一意的に分解される．y を x の L の上への正射影という．このことを $P_L x = y$ と表す．

証明：まず一意性について示す．

$$x = y + z = y' + z' \qquad y, y' \in L \quad z, z' \in L^{\perp}$$

であるとすると，$y - y' = z - z'$ となる．$L \cap L^{\perp} = \{0\}$ からあきらかに $y = y'$, $z = z'$ を得る．

次に分解の可能性について示す．

$x \in X$ に対して，X から L への距離を δ とおく．すなわち

$$\delta = \inf_{\xi \in L} \| x - \xi \|$$

とする．そして $\xi_n \in L, \quad \| x - \xi_n \| \to \delta$ となる点列 $\{\xi_n\}$ をとる．

$\{\xi_n\}$ が L のコーシー列であることを示す．

中線定理より

$$\| (x-\xi_n)+(x-\xi_m) \|^2 + \| (x-\xi_n)-(x-\xi_m) \|^2 = 2 \| x-\xi_n \|^2 + 2 \| x-\xi_m \|^2$$

であり，また $\dfrac{1}{2}(\xi_n + \xi_m) \in L$ より

$$\delta^2 \leq \| x - \frac{\xi_n + \xi_m}{2} \|^2$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} 0 \leq \| \xi_n - \xi_m \|^2 &= \| (x - \xi_n) - (x - \xi_m) \|^2 \\ &= 2 \| x - \xi_n \|^2 + 2 \| x - \xi_m \|^2 - \| (x - \xi_n) + (x - \xi_m) \|^2 \\ &= 2 \| x - \xi_n \|^2 + 2 \| x - \xi_m \|^2 - 4 \| x - \frac{\xi_n + \xi_m}{2} \|^2 \end{aligned}$$

$$\leq 2 \parallel x - \xi_n \parallel^2 + 2 \parallel x - \xi_m \parallel^2 - 4\delta^2$$

を得る．$m, n \to \infty$ とすると $\parallel x - \xi_n \parallel \to \delta, \quad \parallel x - \xi_m \parallel \to \delta$ であるから $\parallel \xi_n - \xi_m \parallel \to 0$ となる．すなわち $\{\xi_n\}$ はコーシー列である．

したがって $\{\xi_n\}$ はある $y \in X$ に収束するが，L が閉部分空間であるから $y \in L$ である．ゆえに $\delta = \parallel x - y \parallel$ である．

次に，$z = x - y$ とおくとき $z \in L^\perp$ であることを示す．

$\xi \in L$ に対して

$$\varphi(t) = \parallel z - \gamma\, t\, \xi \parallel^2 \qquad \gamma = (z, \xi), \quad t \in R$$

とおく．いま $y + \gamma\, t\, \xi \in L$ であるから

$$\delta^2 = \varphi(0) \leq \varphi(t)$$

となる．ここで

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \parallel z \parallel^2 - \gamma\, t\, (\xi, z) - \overline{\gamma}\, t\, (z, \xi) + \parallel \gamma\, t\, \xi \parallel^2 \\ &= \parallel z \parallel^2 - 2|\gamma|^2\, t + |\gamma|^2\, t^2 \ \parallel \xi \parallel^2 \end{aligned}$$

であるから，$\gamma \neq 0$ ならば t が十分小であると $\varphi(t) < \varphi(0) = \delta^2$ となり矛盾する．よって $\gamma = 0$ である．ゆえに $z \in L^\perp$ である．

以上のことから一意的に分解が可能である． **（証明終わり）**

射影定理によって X はこの L を用いて

$$X = L \oplus L^\perp$$

と直和分解される．

次に X をヒルベルト空間とし $\{x_k\}$ を有限又は可算個の X の部分集合とし

$$(x_j, x_k) = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n)$$

が成り立つとき $\{x_k\}$ を **正規直交系** という．このとき

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, x_j, \sum_{k=1}^{n} \beta_k\, x_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, \overline{\beta_k}$$

が成り立つ．

例 1) $\quad L^2\big((0,1)\big)$ において $\{\sqrt{2}\sin \pi j t\}_{j=1}^{\infty}$ は正規直交系である．

例 2) $\quad L^2\big((0,1)\big)$ において $\{e^{2\pi k t i}\}_{k=0}^{\infty} \quad (i = \sqrt{-1})$ は正規直交系である．

定理 3.4 (ベッセルの不等式) $\{x_k\}$ を X の正規直交系とすれば，任意の $x \in X$ に対して

$$\sum_k |(x, x_k)|^2 \leq \parallel x \parallel^2$$

が成り立つ．

証明： $\alpha_k = (x, x_k)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \|^2 \\
&= \| x \|^2 - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k}\, (x, x_k) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, (x_k, x) + \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j\, \overline{\alpha_k}\, (x_j, x_k) \\
&= \| x \|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \leq \| x \|^2$ である．ここで $n \to \infty$ とすればベッセルの不等式を得る． **（証明終わり）**

$\{x_k\}$ をヒルベルト空間 X の正規直交系とする．$\{x_k\}$ **によって生成される閉部分空間** L とは

$$L_0 = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \quad : \alpha_k \in C, \quad n \text{は任意の自然数} \right\}$$

とするとき，$L = \overline{L_0}$ となるときをいう．このとき L は X の閉部分空間となる．

射影定理によって X は，この L をもちいて

$$X = L \oplus L^{\perp}$$

と直和分解される．すなわち，各 $x \in X$ は

$$x = y + z \qquad (y \in L, \quad z \in L^{\perp})$$

と表される．このとき

$$y = P_L x$$

と表す．

定理 3.5 $\{x_k\}$ によって生成される閉部分空間を L とすると

$$L \ni y = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \qquad (\alpha_k \in C)$$

である．

証明： L の要素 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, \quad \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j, \quad (m > n)$ にたいして

$$\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j \|^2 = \left(\sum_{j=n+1}^{m} \alpha_j x_j, \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k x_k \right) = \sum_{j=n+1}^{m} |\alpha_j|^2$$

となる．$n, m \to \infty$ とすれば $\displaystyle\sum_{j=n+1}^{m} |\alpha_j|^2 \to 0$ より $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$ は L の収束列であり，L が閉部分空間であるから $y = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j \in L$ である． **（証明終わり）**

定理 3.6 $\{x_k\}$ によって生成される閉部分空間を L とすると，任意の $x,\ x' \in X$ に対して

$$P_L x = \sum_k (x, x_k) x_k \tag{3.9}$$

$$(P_L x, P_L x') = \sum_k (x, x_k)\overline{(x', x_k)} \tag{3.10}$$

である．

証明：前半　$\alpha_j = (x, x_j)$ とおき，$y = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j \in L$ とおくと，内積の連続性から

$$(x - y,\ x_k) = (x, x_k) - (\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j,\ x_k) = (x, x_k) - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\ (x_j, x_k) = 0$$

であるから $x - y \perp x_k$ である．したがって $\{x_k\}$ の線形結合 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \gamma_k x_k \quad (\gamma_k \in C)$ とも直交し，内積の連続性から

$$(x - y,\ \xi) = 0 \qquad \xi \in L$$

である．ゆえに $z \equiv x - y \in L^{\perp}$ である．したがって

$$P_L x = y = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j = \sum_{j=1}^{\infty} (x, x_j) x_j$$

と表すことができる． ゆえに $P_L x = \displaystyle\sum_k (x, x_k) x_k$ が成り立つ．但し，$\displaystyle\sum_k$ は $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}, \sum_k^n$ を表す．

後半　任意の $x, x' \in X$ に対して，$\alpha_j = (x, x_j),\quad \alpha_j' = (x', x_j)$ とおくと，シュワルツの不等式とベッセルの不等式から

$$\Big|\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j,\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j' x_j\Big)\Big| \le \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j \overline{\alpha_j'}| \le \Big(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j'|^2\Big)^{1/2} \le \| x \| \| x' \|$$

となり $n \to \infty$ とすると $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \overline{\alpha_j'}$ は絶対収束する．よって

$$(P_L x, P_L x') = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j,\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j' x_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \overline{\alpha_j'} = \sum_{j=1}^{\infty} (x, x_j)\ \overline{(x', x_j)}$$

が成り立つ．ゆえに $(P_L x, P_L x') = \sum_k (x, x_k)\,\overline{(x', x_k)}$ （絶対収束）が成り立つ．**（証明終わり）**

3.4 完全性

定理 3.7 $\{x_k\}$ をヒルベルト空間の正規直交系とし，$\{x_k\}$ で生成される閉部分空間を L とする．このとき次の条件 (1) ～ (5) は同値である．

(1) $L = X$

(2) 任意の $x \in X$ に対して $x = \sum_k (x, x_k)\, x_k$

(3) 任意の $x \in X$ に対して $\| x \|^2 = \sum_k |(x, x_k)|^2$ （**パーセヴァルの等式**）

(4) 任意の $x, x' \in X$ に対して $(x, x') = \sum_k (x, x_k)\,\overline{(x', x_k)}$

(5) 任意の $x \in X$ に対して $(x, x_k) = 0$ ならば $x = 0$

証明： (1) ⇒ (2)：$L = X$ より $x = P_L x = \sum_k (x, x_k) x_k$ である．

(2) ⇒ (4)：(2) より $(x, x') = (P_L x, P_L x') = \sum_k (x, x_k)\,\overline{(x', x_k)}$ となる．

(4) ⇒ (3)：$\| x \|^2 = (x, x) = (P_L x, P_L x) = \sum_k (x, x_k)\,\overline{(x, x_k)} = \sum_k |(x, x_k)|^2$ となる．

(3) ⇒ (5)：明らかである．

(5) ⇒ (1)：もし $x \in L^\perp$ とすると $(x, x_k) = 0 \quad (k = 1, 2 \ldots)$ となり仮定から $x = 0$ を導く．ゆえに $L^\perp = \{0\}$ である．射影定理から $X = L$ を得る． **（証明終わり）**

X の正規直交系 $\{x_k\}$ が定理 5 の (1) ～ (5) のいずれかの条件を満たすとき $\{x_k\}$ は X の **完全正規直交系**（単に **完全**）であるという．

定理 3.8 ヒルベルト空間 $L^2\big((-\pi, \pi)\big)$ において，

$$\Big\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ \sin nt,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ \cos nt\Big\}_{n=1}^{\infty}$$

は完全正規直交系をなす．

証明： 簡単のために

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_{2k}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ \cos nt, \quad \varphi_{2k-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ \sin nt$$

とおく．$\varphi_k(t)$ $(k=0,1,2,\dots)$ が正規直交系をなすことは明らかである．完全性を示すためには，$x \in L^2(-\pi,\pi)$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\,\varphi_k(t)\,dt = 0 \quad (k=0,1,\dots) \qquad \Longrightarrow \qquad x(t) \equiv 0$$

であることを示せばよい．そのために $x(t) \not\equiv 0$ として矛盾を導く．すなわち $x(t)$ の実部，又は虚部が恒等的に 0 でないとする．ここでは実部が 0 でないとする.（虚部についても同様にできる.）以後 $x(t)$ の実部を $x(t)$ で表すことにする．

まず $x(t)$ が連続の場合

$x(t)$ は $[-\pi,\pi]$ においても連続であるから $x(t)$ は最大値を持つ．いまその t の値を t_0 とする．最大値 $x(t_0)$ を $x(t_0)>0$ と仮定しても一般性を失わない.（負のときは，$-x(t)$ を考えればよい.）このとき，$\varepsilon>0,\ \delta>0$ を適当にとって，$I=[t_0-\delta,t_0+\delta]$ とおくとき，$x(t) \geq \varepsilon \quad (t \in I)$ となり，そして

$$h(t) = 1+\cos(t-t_0)-\cos\delta$$

とおくとき，

$$h(t) \geq 1 \quad (t \in I), \qquad |h(t)| < 1 \quad (t \in [-\pi,\pi] \setminus I)$$

とすることができる．$h^n(t)$ は φ_j の一次結合で表されるから

$$\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\,h^n(t)\,dt = 0 \qquad (n=1,2,\dots) \tag{3.11}$$

となる．

積分区間 $[-\pi,\pi]$ を I と $[-\pi,\pi] \setminus I \equiv I'$ に分解すると，$|h(t)|<1 \quad (t \in I')$ より

$$\Big|\int_{I'} x(t)\,h^n(t)\,dt\Big| \leq \int_{I'} \big|x(t)\big|\,dt \tag{3.12}$$

となる．

また，$I''=[t_0-\delta',t_0+\delta'] \quad (0<\delta'<\delta)$ とおくと，　$h(t) \geq 1+\eta \quad (t \in I'')$ となる $\eta>0$ が存在する．よって

$$x(t)\,h^n(t) \geq \varepsilon\,(1+\eta)^n \quad (t \in I'')$$

であるから

$$\int_I x(t)\,h^n(t)\,dt \geq \int_{I''} x(t)\,h^n(t)\,dt \geq 2\delta'\varepsilon\,(1+\eta)^n$$

となり，$n \to \infty$ とすると $(1+\eta)^n \to \infty$ となり，上式の左辺 $\to \infty$ となる．しかし (3.11) より

$$\int_I x(t)\,h^n(t)\,dt = -\int_{I'} x(t)\,h^n(t)\,dt$$

であり，(3.12) より $\displaystyle\int_{I'} x(t)\,h^n(t)\,dt$ は有界であるから矛盾を導く．ゆえに　$x(t) \equiv 0$ である．

次に $x(t)$ が連続でない場合

$$y(t) = \int_{-\pi}^{t} x(s)\,ds$$

とおくと $y(t)$ は $[-\pi,\pi]$ 上連続で，仮定から $x\perp\varphi_0$ であり， $y(\pi)=y(-\pi)=0$ となる．また

$$\int_{-\pi}^{\pi} y(t)\ \cos kt\ dt = \frac{1}{k}\Big[y(t)\ \sin kt\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\ \sin kt\ dt = 0$$

であり，同様にして

$$\int_{-\pi}^{\pi} y(t)\ \sin kt\ dt = 0$$

を得る．$\cos kt,\ \sin kt$ は定数と直交するから

$$z(t) = y(t) - \int_{-\pi}^{\pi} y(s)ds$$

は $\{\varphi_k\}$ と直交する．$z(t)$ は連続であるから $z(t)\equiv 0$ を得る．

$$z^{'}(t) = y^{'}(t) = x(t)$$

であるから $x(t)\equiv 0 \quad (a.e.)$ となる．以上のことから完全性は示された．**（証明終わり）**

以上のことから，任意の $L^2\big((-\pi,\pi)\big)$ に属する任意の関数 $x(t)$ は

$$x(t) = \frac{1}{2}\ \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\alpha_n\ \cos nt + \beta_n\ \sin nt\Big) \tag{3.13}$$

と展開でき，係数 α_k,β_k は

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\ \cos kt\ dt, \qquad \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\ \sin kt\ dt$$

と表すことができる．この展開を **フーリェ展開** という．係数 α_k,β_k を **フーリェ係数** という．

3.5 シュミットの直交化

プレ・ヒルベルト空間 X の有限個または可算個の一次独立な $\{y_i\}$ をとる．このとき次の性質をもつ正規直交系 $\{x_k\}$ を構成できる．

$$\begin{cases} a)\ \text{各 } x_n \text{ は } y_1,\ldots,y_n \text{ の一次結合で表される．} \\ b)\ \text{各 } y_n \text{ は } x_1,\ldots,x_n \text{ の一次結合で表される．} \end{cases} \tag{3.14}$$

このことを n に関する帰納法で示す．

$$x_1 = \frac{y_1}{\parallel y_1 \parallel} \qquad x_2 = \frac{y_2-(y_2,x_1)x_1}{\parallel y_2-(y_2,x_1)x_1 \parallel}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \frac{y_n - \sum_{j=1}^{n-1}(y_n, x_j)x_j}{\| y_n - \sum_{j=1}^{n-1}(y_n, x_j)x_j \|}$$

とすると，$\{y_j\}$ は一次独立であるから $y_1 \neq 0$ となり x_1 が定義され x_1 は y_1 の一次結合で表される．y_2 は y_1 ，すなわち x_1 の一次結合で表すことはできないから

$$y_2 - (y_2, x_1)x_1 \neq 0$$

である．よって x_2 が定義され y_1, y_2 の一次結合で表される．$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ が定義され，それらが $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ の一次結合で表されれば

$$y_n - \sum_{j=1}^{n-1}(y_n, x_j)x_j \neq 0$$

となる．よって x_n が定義され，x_n は $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y_n$ の一次結合，すなわち x_n は $y_1, y_2, \ldots, y_n$ の一次結合で表される．

$b)$ については作り方から明らかである．構成した系 $\{x_k\}$ が正規直交系であることは容易に確かめられ，$\{x_k\}$ に絶対値 1 の複素数 $e^{i\theta_k}$ を乗ずることを除けば一意的に定まる．この様な手順で正規直交系を構成する仕方を **シュッミトの直交化法** という．

定理 3.9 可分な無限次元ヒルベルト空間 X には，可算個の要素からなる完全正規直交系が存在する．

証明： X が可分な無限次元ヒルベルト空間より，X で稠密な可算部分集合 $\{z_j\}$ が存在する．ここで $z_1 = 0$ なら除き，$z_1 \neq 0$ なら除かない．次に z_2 が z_1 の一次結合で表されれば除き，そうでなければ除かない．以下同様に，z_n が $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ の一次結合で表されれば除き，そうでなければ除かない．こうして $\{z_j\}$ から新しい系 $\{y_j\}$ を作る．$\{y_j\}$ が一次独立であることは明らかである．このとき，シュミットの直交化法によって $a)$, $b)$ の性質をもつ正規直交系 $\{x_k\}$ が存在する．

完全性について

次にこの系が完全であることを示す．x を X の任意の要素とし

$$(x, x_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

とする．このとき y_k が $x_1, x_2, \ldots x_k$ の一次結合で表されるから，

$$(x, y_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

がいえる．また，z_k が $y_1, y_2, \ldots y_k$ の一次結合で表されるから，

$$(x, z_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

がいえる．$\{z_k\}$ は X で稠密であるから

$$z_{k_n} \to x \qquad (n \to \infty)$$

となる部分列 $\{z_{k_n}\}$ が存在する．内積の連続性から

$$(x, x) = \lim_{n\to\infty} (x, z_{k_n}) = 0$$

となる．ゆえに $x = 0$ を得る．したがって $\{x_k\}$ は完全である．　**（証明終わり）**

ルジャンドル多項式とシュミットの直交化

$-1 \le t \le 1$ において一次独立な

$$1,\ t,\ t^2, \ldots, t^n, \ldots$$

を $L^2(-1, 1)$ において直交化する．$y_n(t) = t^{n-1}$ とおくと，$\| y_1 \| = \sqrt{2}$ より $x_1(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる．また $(y_2, x_1) = 0, \| y_2 \| = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ であるから

$$x_2(t) = \frac{y_2 - (y_2, x_1)x_1}{\| y_2 - (y_2, x_1)x_1 \|} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, t$$

となる．以下ひとつひとつ遂行して $\{x_k\}$ を計算できる．一方ルジャンドルの多項式を

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\, \frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n$$

と定義すると，$P_n(t)$ は n 次の多項式であって

$$\int_{-1}^{1} P_n(t) P_m(t)\, dt = \frac{2}{2n+1}\, \delta_{nm}$$

が成り立ち，$\{P_n\}$ は一次独立であることは明らかである．そこで

$$x_{n+1}(t) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2} P_n(t) \tag{3.15}$$

と定めると $\{x_n\}$ は (3.14) を満たす正規直交系であることがわかる．(3.14) を満たす正規直交系はシュミットの直交化法によって構成されたものに限るから (3.15) が求める $\{x_n\}$ である．

3.6　フーリェ・ベッセル展開

$J_\nu(\alpha x),\ J_\nu(\beta x)$ の満足する微分方程式から

$$\frac{d}{dx}\left[x\, \frac{dJ_\nu(\alpha x)}{dx}\, J_\nu(\beta x) - x\, \frac{dJ_\nu(\beta x)}{dx}\, J_\nu(\alpha x)\right] = (\beta^2 - \alpha^2)\, x\, J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x) \tag{3.16}$$

$\nu > -1$ であれば実数軸の上で 0 から 1 まで積分でき

$$\int_0^1 J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x)\, x\, dx = \frac{1}{\beta^2 - \alpha^2}\Big\{\alpha\, J_\nu{}'(\alpha) J_\nu(\beta) - \beta\, J_\nu(\alpha) J_\nu{}'(\beta)\Big\} \tag{3.17}$$

$\alpha = \beta$ のときは $\beta = \alpha + \epsilon$ とおきテイラー展開を用いて $\epsilon \to 0$ の極限値を求めると

$$\begin{aligned}\int_0^1 [J_\nu(\alpha x)]^2 x\, dx &= \frac{1}{2}\Big\{[J_\nu{}'(\alpha)]^2 - J_\nu(\alpha) J_\nu{}''(\alpha) - \frac{1}{\alpha}\, J_\nu(\alpha) J_\nu{}'(\alpha)\Big\} \\ &= \frac{1}{2}\Big\{[J_\nu{}'(\alpha)]^2 + \Big(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2}\Big)[J_\nu(\alpha)]^2\Big\}\end{aligned} \tag{3.18}$$

さて，$J_\nu(x) = 0$ の根 (> 0) を $\alpha,\ \beta$ とすると

$$\int_0^1 J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x)\, x\, dx = 0 \qquad \alpha \neq \beta$$

$$\int_0^1 [J_\nu(\alpha x)]^2 x\, dx = \frac{1}{2}\, [J_\nu{}'(\alpha)]^2 = \frac{1}{2}\, [J_{\nu+1}(\alpha)]^2$$

を得る．ゆえに

$$J_\nu(x) = 0$$

の正根を $j_1, j_2, \ldots$ とするとき，すなわち

$$J_\nu(j_m) = 0 \qquad 0 < j_1 < j_2 < j_3 < \cdots$$

となる零点 $\{j_m\}$ を用いて，関数系

$$\frac{\sqrt{2x}}{J_{\nu+1}(j_m)}\, J_\nu(j_m x) \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

はヒルベルト空間 $L^2\big((0,1)\big)$ において正規化された直交関数系を成す. 次にフーリェ・ベッセル展開の完全性について述べる.

この証明は　G.N.Watson [18] 第　　を参考にした．また，$x = 0, 1$ における展開については証明が複雑になるので省略する. まず 3 つの補題を用意する.

補題 3.1

$$T_n(t, x) = \sum_{m=1}^{n} \frac{2\, J_\nu(j_m x) J_\nu(j_m t)}{J_{\nu+1}{}^2(j_m)} \qquad (0 < x < 1, \quad \nu + 1/2 \geq 0) \tag{3.19}$$

とおくとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x t^{\nu+1}\, T_n(t, x)\, dt = \frac{1}{2}\, x^\nu, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_x^1 t^{\nu+1}\, T_n(t, x)\, dt = \frac{1}{2}\, x^\nu \tag{3.20}$$

が成り立つ.

証明は G.N.Watson [18] の [18.21],[18.22] を参照.

補題 3.2 区間 $(0,1)$ で有界変動で，$\sqrt{x}f(x)$ が 2 乗可積分な関数で，区間 (a,b) が $(a,b)\subset[0,1]$ で，$x\notin[a,b],\ 0<x<1$ であるとき，n を十分大きくとると

$$\int_a^b tf(t)T_n(t,x)\,dt = o(1) \tag{3.21}$$

となる．ここで，$T_n(t,x)$ は補題 3.1 に示すものである．

証明は G.N.Watson [18] の The analogue of Riemamm-Lebesgue Lemma を参照.

補題 3.3 n に無関係な U が存在して

$$\Big|\int_0^{\bar{t}} t^{\nu+1}\,T_n(t,x)\,dt\Big| < U \qquad 0<x\le 1,\ 0<\bar{t}\le 1 \tag{3.22}$$

が成り立つ．ここで，$T_n(t,x)$ は補題 3.1 に示すものである．

証明は G.N.Watson [18] の [18.22] を参照.

これらの補題をもちいて次の定理が証明される.

定理 3.10 区間 $(0,1)$ で $\sqrt{x}f(x)$ が 2 乗可積分で有界変動な関数 $f(x)$ において，区間 (a,b) を $0<a<b<1$ とし，区間 (a,b) の任意な x に対して

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Big\{f(x+0)+f(x-0)\Big\} &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_\nu(j_m x)\\ \text{但し } a_m &= \frac{2}{J_{\nu+1}^2(j_m)}\int_0^1 t\ f(t)\ J_\nu(j_m t)\,dt \qquad (\nu+1/2\ge 0)\end{aligned} \tag{3.23}$$

と表される.

証明： 補題 3.1 より

$$\sum_{m=1}^{n} a_m J_\nu(j_m x) = \int_0^1 t\ f(t)\ T_n(t,x)\,dt \tag{3.24}$$

$$\frac{1}{2}\Big\{f(x+0)+f(x-0)\Big\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} x^{-\nu} f(x-0) \int_0^x t^{\nu+1}\, T_n(t,x)\, dt + \lim_{n\to\infty} x^{-\nu} f(x+0) \int_x^1 t^{\nu+1}\, T_n(t,x)\, dt \quad (3.25)$$

が成り立つ. ここで

$$S_n(x) \equiv \int_0^x t^{\nu+1}\Big\{t^{-\nu} f(t) - x^{-\nu} f(x-0)\Big\} T_n(t,x)\, dt$$
$$+ \int_x^1 t^{\nu+1}\Big\{t^{-\nu} f(t) - x^{-\nu} f(x+0)\Big\} T_n(t,x)\, dt \qquad (3.26)$$

とおくと，(3.23) を示すためには $n \to \infty$ のとき $S_n(x) \to 0$ を示せば十分である. では，

$$\int_x^1 t^{\nu+1}\Big\{t^{-\nu} f(t) - x^{-\nu} f(x+0)\Big\} T_n(t,x)\, dt$$

について調べてみる． $t^{-\nu} f(t) - x^{-\nu} f(x+0)$ は (x,b) において有界であるから，区間 (x,b) の任意の t に対して

$$\chi_1(x+0) = \chi_2(x+0) = 0$$

となる単調増加な $\chi_1(t)$, $\chi_2(t)$ を用いて

$$t^{-\nu} f(t) - x^{-\nu} f(x+0) \equiv \chi_1(t) - \chi_2(t)$$

と表すことができる.（Modern Analysis [3.64] を参照）
このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $0 < \delta < b - x$ となる δ が存在して

$$x \le t \le x + \delta \quad \text{ならば} \quad 0 \le \chi_1(t) < \varepsilon, \quad 0 \le \chi_2(t) < \varepsilon$$

となる. したがって

$$\int_x^1 t^{\nu+1}\Big\{t^{-\nu} f(t) - x^{-\nu} f(x+0)\Big\} T_n(t,x)\, dt$$
$$= \int_{x+\delta}^1 t^{\nu+1}\Big\{t^{-\nu} f(t) - x^{-\nu} f(x+0)\Big\} T_n(t,x)\, dt$$
$$+ \int_x^{x+\delta} t^{\nu+1}\, \chi_1(t)\, T_n(t,x)\, dt - \int_x^{x+\delta} t^{\nu+1}\, \chi_2(t)\, T_n(t,x)\, dt$$

と変形することができる. 補題 3.2 から n を十分大きくとると

$$\Big| \int_{x+\delta}^1 t^{\nu+1}\Big\{t^{-\nu} f(t) - x^{-\nu} f(x+0)\Big\} T_n(t,x)\, dt \Big| < \varepsilon \qquad (3.27)$$

となる. また，第 2 平均値の定理より

$$\int_x^{x+\delta} t^{\nu+1}\, \chi_1(t)\, T_n(t,x)\, dt = \chi_1(x+\delta) \int_{x+\xi}^{x+\delta} t^{\nu+1}\, T_n(t,x)\, dt$$

となる ξ が区間 $(0,\delta)$ に存在する． 補題 3.3 より n に無関係な U が存在して

$$\Big| \chi_1(x+\delta) \int_{x+\xi}^{x+\delta} t^{\nu+1}\, T_n(t,x)\, dt \Big| < 2\varepsilon\, U$$

となる. 同様にして第 3 項も $2\varepsilon U$ を超えないから，結局 n を十分大きくとれば

$$\Big|S_n(x)\Big| < (8U+2)\,\varepsilon$$

を得る. よって定理は証明された. **（証明終わり）**

定理 3.11 $\sqrt{x}\ f(x)$ が $(0,1)$ 上 2 乗可積分な複素数値関数 $f(x)$ の全体のなすヒルベルト空間を $L^2[(0,1), x\ dx]$ で表すと，$\nu \geq -1/2$ のとき，関数系 $\{J_\nu(j_m x)\}_{m=1}^{\infty}$ は $L^2[(0,1), x\ dx]$ において完全直交系をなす.

証明： $f(x)$ は区間 $[0,1]$ において連続で有界変動とし，$f(1)=0$ とする．そして $(a,b) \subset [0,1]$ とし，正の十分に小さい数 $\Delta\ (>0)$ をとる．このとき定理 3.10 における級数は $[a+\Delta, b-\Delta]$ 上一様に収束する. なぜなら，$f(x)$ は $[a+\Delta, b-\Delta]$ において有界で連続であることから $f(x)$ はその区間で一様連続である. したがって，$\delta\ (>0)$ のとり方を $x \in (a+\Delta, b-\Delta)$ に無関係にとることができる. ここで

$$\Big|\int_{x+\delta}^{1} t^{\nu+1/2}\big\{t^{-\nu}f(t)-x^{-\nu}f(x)\big\}\ dt\Big| \leq \int_0^1 \big|t^{1/2}\ f(t)\big|\ dt + \big|x^{-\nu}f(x)\big| \int_0^1 t^{\nu+1/2}\ dt \quad (3.28)$$

であり，$f(x)$ が有界で連続であるから (3.28) は $(a+\Delta, b-\Delta)$ で有界である． G.N.Watson [18.23] の Riemamm-Lebesgue Lemma の証明から x が δ に対して無関係に

$$\int_{x+\delta}^{1} t^{\nu+1}\Big\{t^{-\nu}f(t)-x^{-\nu}f(x)\Big\}T_n(t,x)\ dt \longrightarrow 0 \qquad as \quad n\to\infty \tag{3.29}$$

であることがわかる．他の積分についても同様に示すことができる．更に $x=0,1$ の近傍における収束を考えると，$\displaystyle\sum_{m=1}^{n} a_m J_\nu(j_m x)$ は，$n\to\infty$ のとき $(0,1)$ 上 $f(x)$ に一様に収束する. したがって，$\{J_\nu(j_m x)\}_{m=1}^{\infty}$ の生成する部分空間は，$L^2[(0,1), x\ dx]$ で稠密であるから，定理 3.7 より完全である. **（証明終わり）**

第4章　ポテンシャル論

引力を及ぼす物質が球形の分布をなすことから球面関数の応用として，ポテンシャル関数 V の計算に特殊関数がもちいられる．点 P におけるポテンシャル関数 V は，点 P が物質の内または外によって，ラプラスの方程式またはポアッソンの方程式を満足し，これらの偏微分方程式を変数分離法で解くうえで特殊関数が現れてくる．

4.1　ポテンシャルの概念

3 次元ユークッリド空間内に質点 P（質量 M_P）と質点 Q（質量 M_Q）があり，質点 P に働く力を $\mathbf{F}_P$ とする．重力定数を G とすれば

$$\mathbf{F}_P = -G\ M_P\ M_Q\ \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} \tag{4.1}$$

但し，$\mathbf{x} = (x, y, z)$ は P の位置ベクトル，$\mathbf{x}' = (x', y', z')$ は Q の位置ベクトルで $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ とする．このとき，質点 P, Q の間に働く引力 $\mathbf{F}$ の大きさは $\dfrac{G\ M_P\ M_Q}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}$ であり 2 質点 PQ を結ぶ方向を向いている．(4.1) を変形すると

$$\mathbf{F}_P = M_P \cdot \Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Big) \frac{G\ M_Q}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \qquad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$$

となり，位置関数 $V(\mathbf{x})$ を

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{G\ M_Q}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{4.2}$$

と定義すれば，P に作用する力は

$$\mathbf{F}_P = -M_P \cdot \mathrm{grad}V = -M_P \Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)\ V \tag{4.3}$$

である．質点 Q が固定されているとすれば，V は (x, y, z) のみの関数と見ることができ，V のことを質点 Q の **ポテンシャル関数** とよぶ．

4.2　ラプラスとポアッソンの方程式

3 次元空間のある有限部分 Ω 内に物質（又は電荷）が分布しているとする．Ω 内の 1 点 $\mathbf{x}_0$ にある微小な体積要素 $d\tau_0 = dx_0\ dy_0\ dz_0$ は質量 $\rho(\mathbf{x}_0)\ d\tau_0$ をもっているとする．

そして，$\rho(\mathbf{x}_0)$ は積分可能であると仮定する．この質量による点 $P(x,y,z)$（必ずしも Ω の内部の点とは限らない）におけるポテンシャルの値は

$$\frac{-G\,\rho(\mathbf{x}_0)\,d\tau_0}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}$$

である．したがって，Ω 内にあるすべての物質による P でのポテンシャル V の値は

$$V(\mathbf{x}) = -G\int\int\int_{\Omega}\frac{\rho(\mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}\,d\tau_0 \tag{4.4}$$

で与えられる．これから

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -G\int\int\int_{\Omega}\rho(\mathbf{x}_0)\Big\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big[\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}\Big]\Big\}\,d\tau_0 \tag{4.5}$$

を得る．

点 $P(x,y,z)$ が Ω の外部にあるとき

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big[\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}\Big] = -\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^3} + \frac{3(x-x_0)^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^5} \tag{4.6}$$

より，$\mathbf{x}$ が Ω の外部の点であれば右辺は有限で定まった値をもつ．y,z についても同様にすると

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)\Big[\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}\Big] = 0$$

を得る．故に

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{4.7}$$

というラプラスの方程式が成り立つ．以後，簡単のため $\nabla^2 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ と表すと (4.7) は $\nabla^2 V = 0$ と表される．

点 $P(x,y,z)$ が Ω の内部にあるとき

Ω の内部の点 $P'(x',y',z')$ を中心とする半径 ϵ の球をとりそれを E で表す．$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| < \epsilon$ とすると

$$V(\mathbf{x}) = V_E(\mathbf{x}) + V_{\Omega-E}(\mathbf{x})$$

と表され，点 $P(\mathbf{x})$ が $\Omega - E$ の外にあるから $\nabla^2 V_{\Omega-E}(\mathbf{x}) = 0$ となる．$V_E(\mathbf{x})$ を求めるために二つの部分に分けて

$$V_E(\mathbf{x}) = -G\Big\{\int_E\frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}\,d\tau_0 + \int_E\frac{\rho(\mathbf{x}_0)-\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}\,d\tau_0\Big\} \equiv V_1(\mathbf{x}) + V_2(\mathbf{x})$$

と表す．第一項は密度 $\rho(\mathbf{x}')$ である一様な球によるポテンシャルで，第二項は密度分布が $\rho(\mathbf{x}_0)-\rho(\mathbf{x}')$ である球によるポテンシャルである．密度 $\rho(\mathbf{x})$ が位置の連続関数であれば ϵ を小さくすることにより $V_2(\mathbf{x})$ をいくらでも小さくすることができる．したがって，$V_1(\mathbf{x})$ についてのみ考えれば十分である．そのために

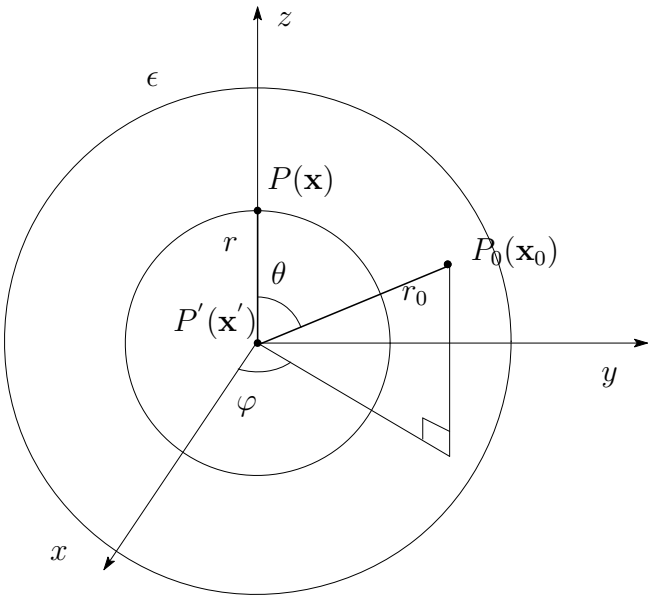

図 4.1:

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| = r, \qquad |\mathbf{x}_0-\mathbf{x}'| = r_0$$

とおき，$\mathbf{x}-\mathbf{x}'$ と $\mathbf{x}_0-\mathbf{x}'$ のなす角を θ とおくと

$$V_1(\mathbf{x}) = -G\ \rho(\mathbf{x}')\ 2\pi \int_0^{\epsilon} {r_0}^2\ dr_0 \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\ d\theta}{(r^2+{r_0}^2-2rr_0\ \cos\theta)^{1/2}}$$

となる．

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\ d\theta}{(r^2+{r_0}^2-2rr_0\ \cos\theta)^{1/2}} &= \frac{1}{rr_0}\Big[(r^2+{r_0}^2-2rr_0\ \cos\theta)^{1/2}\Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\ &= \begin{cases} 2/r & r \geq r_0 \\ 2/r_0 & r \leq r_0 \end{cases}\end{aligned}$$

であるから

$$V_1(\mathbf{x}) = -2\pi\ G\ \rho(\mathbf{x}')\Big(\epsilon^2 - r^2/3\Big)$$

を得る．よって

$$\nabla^2 V_1(\mathbf{x}) = \Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}\Big)V_1 = 4\pi\ G\ \rho(\mathbf{x}')$$

を得る．$\epsilon \to 0$ のとき $\rho(\mathbf{x}') \to \rho(\mathbf{x})$ であるからポアッソン (Poisson) の方程式

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4\pi\ G\ \rho(\mathbf{x}) \tag{4.8}$$

という結果を得る．

注意

ここでは重力を例にとって，ポテンシャル関数の方程式を導いたが，電荷の間に作用する力についても同様の偏微分方程式を満足する．このとき異なるのは $G\rho$ が電荷の密度分布に変わるだけである．したがって，二つの場合を同じ様に扱うために $G = 1$ とし，以下あらためて

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4\pi\ \rho(\mathbf{x}) \tag{4.9}$$

をポアッソンの方程式と呼ぶことにする．ポアッソンの方程式に対しては重ね合わせの原理が成り立つ．すなわち $\rho_1(\mathbf{x}), \rho_2(\mathbf{x})$ を別々の関数としたとき

$$\nabla^2 V_1 = 4\pi\ \rho_1, \qquad \nabla^2 V_2 = 4\pi\ \rho_2$$

であれば $V_1(\mathbf{x}) + V_2(\mathbf{x})$ は物質分布が $\rho(\mathbf{x}) = \rho_1(\mathbf{x}) + \rho_2(\mathbf{x})$ であるときのポアッソン方程式の解となる．ポテンシャルの計算の注意として，ポテンシャルは位置の連続関数であり, 物質分布が $\rho(\mathbf{x}) \neq 0$ であれば無限遠方で 0 とならなければならない.

4.3 球座標によるラプラス方程式の一般解

球座標 (r, θ, φ) を用いたときラプラスの方程式は

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \cot\theta \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\Big) = 0 \tag{4.10}$$

となる．変数分離法を用いるため

$$V(r, \theta, \varphi) = R(r)\ \Theta(\theta)\ \Phi(\varphi)$$

とおくと (4.10) は

$$\frac{r^2}{R}\Big(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{dR}{dr}\Big) + \frac{1}{\Theta}\Big(\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \cot\theta\,\frac{d\Theta}{d\theta}\Big) + \frac{1}{\Phi\ \sin^2\theta}\,\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = 0$$

となる．A を分離定数とすると

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{dR}{dr} - \frac{A}{r^2}\,R = 0 \tag{4.11}$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\Theta}\Big(\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \cot\theta\,\frac{d\Theta}{d\theta}\Big) + A\sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi}\,\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} \tag{4.12}$$

となる．さらに，(4.12) の分離定数を m^2 とおくと

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\ \Phi = 0 \tag{4.13}$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \cot\theta\,\frac{d\Theta}{d\theta} + A\ \Theta - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\,\Theta = 0 \tag{4.14}$$

となる.

$\Phi(\varphi)$ の微分方程式について

ポテンシャルは位置の連続関数であるから $\varphi = 0$ と $\varphi = 2\pi$ におけるポテンシャルの値は一致する．よって m は整数である．ゆえに一般解

$$\Phi(\varphi) = \gamma \cdot \cos m\varphi + \delta \cdot \sin m\varphi \qquad (m \ : \ \text{非負整数},\ \gamma, \delta \ : \ \text{任意定数})$$

を得る．

$\Theta(\theta)$ の微分方程式について

$A = \nu(\nu+1), \quad \cos\theta = x, \quad |x| \leq 1$ とおくと，Θ は (2.53) に示すルジャンドル陪関数の満たす微分方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \Big\{\nu(\nu+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\Big\}\Theta = 0 \tag{4.15}$$

を満たす．

この微分方程式は，$u(x)$ を (2.14) に示したルジャンドル微分方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + \nu(\nu+1)u = 0$$

の解とするとき，

$$w = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m u}{dx^m}$$

とおくことによって得る．

一般にルジャンドル微分方程式の一次独立な解 $P_\nu(z)$, $Q_\nu(z)$ は次の性質を持つ．

1. ν が整数のとき $P_\nu(z)$ は

$$P_n(z) = \sum_{s=0}^{\sigma} \frac{(-1)^s(2n-2s)!}{2^n s!(n-2s)!(n-s)!}\ z^{n-2s}$$

となる．但し，σ は n が偶数のときは $n/2$，奇数のときは $(n-1)/2$ ．

2. ν が整数でないとき $P_\nu(z)$ は, $z = -1$ の近傍での解の性質を得るために

$$|z-1| < 2 \text{ での級数解 } P_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{(m!)^2\Gamma(\nu+1-m)}\Big(\frac{z-1}{2}\Big)^m$$

を $|z+1| < 2$ に解析接続して

$$P_\nu(z) = AP_\nu(-z) + B\Big\{P_\nu(-z)\log\frac{z+1}{2} + g(\frac{z+1}{2})\Big\}$$

となる．但し，g は $|z+1| < 2$ で正則な関数である．特に ν が整数でないときは，$B \neq 0$ であり $z = -1$ において対数的特異点をもつ．

3. $Q_\nu(z)$ を積分表示すると

$$Q_\nu(z) = \frac{1}{2^{\nu+1}} \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}\, dt \quad z \notin (-\infty, 1] \quad \mathrm{Re}(\nu) \geq -1/2$$

となり，$z=1$ で特異点となる．また，$Q_{-\nu-1}$ も $P_\nu(z)$ と一次独立な解であるから，上の議論が $-\nu-1 \geq -1/2$ で成り立ち，結局任意の ν 対して第二種ルジャンドル関数は $z=1$ で特異点をもつ．

以上のことから，一般には (4.15) のルジャンドル陪関数の微分方程式の一般解は

$$P_\nu{}^m(\cos\theta), \qquad Q_\nu{}^m(\cos\theta)$$

の 1 次結合で表されるが，$P_\nu^m(x)$ は一般の ν に対して，

$m=0$ のときは $\log(1+x)$ という項をもつ．

m が自然数のとき $(1+x)^{-m/2}$ という項をもつ．

ことから $x=-1$ で無限大となる．そして，ν が整数 n のとき $P_n(x)$ は x の多項式で特異点は存在しない．

他方 $Q_\nu{}^m(x)$ は，ν が何であっても $x=1$ で特異点をもつ．

したがって，ポテンシャル関数 V は θ の有界な連続関数であるから，条件を満足するのは

$$\text{整数次のルジャンドル陪関数} \quad P_n{}^m(x)$$

のみである．

$R(r)$ の微分方程式について

先の結果から $R(r)$ の微分方程式は

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2} R = 0$$

となり，これは $r=0$ が 2 階同次線形微分方程式の確定特異点である．指数決定方程式の解が $n,\ -n-1$ でその差が自然数であることに注意すれば，独立な解として

$$R(r) = r^n, \quad R(r) = r^{-n-1}$$

を得る．

ラプラス方程式の一般解

ラプラス方程式の一つの特殊解として

$$(\alpha r^n + \beta r^{-n-1}) P_n{}^m(\cos\theta)\ (\gamma \cdot \cos m\varphi + \delta \cdot \sin m\varphi) \tag{4.16}$$

をうる．但し，$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は定数で n は負でない整数，m は $0 \leq m \leq n$ となる整数である．ラプラス方程式の線形性から一般解は (4.16) の 1 次結合で表される．このことは，ヒルベルト空間 $L^2(0, 2\pi)$ において，関数系 $\{\cos m\varphi,\ \sin m\varphi, 1\}$ $(m \geq 1)$ が完全直交系をなし，ヒルベルト空間 $L^2(-1, 1)$ において，関数系 $\{P_n{}^m(x)\}$ $(0 \leq m \leq n)$ が完全直交系をなすことからも理解される．

4.4 球面調和関数

ラプラスの方程式

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

の解で x, y, z に関して n 次の同次多項式であるものを n 次の **体球調和関数** 又は単に **体球関数** とよぶ.

$V(x, y, z)$ の独立な項数

$V(x, y, z)$ を n 次の体球関数とすると

$$V(x, y, z) = \sum_{p+q+r=n} a_{p,q,r}\ x^p\ y^q\ z^r \tag{4.17}$$

と表され，これを z のベキに着目し整理して

$$V(x, y, z) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x, y)\ z^{n-k}$$

と書けば,

φ_0 は実数

φ_1 は x, y の 1 次の同次式 $a_{1,0,n-1}\ x + a_{0,1,n-1}\ y$

φ_k は k 次の同次式

$$a_{k,0,n-k}\ x^k + a_{k-1,1,n-k}\ x^{k-1}\ y^1 + \cdots + a_{1,k-1,n-k}\ x^1\ y^{k-1} + a_{0,k,n-k}\ y^k$$

であり，その係数はそれぞれ 1 個，2 個，$\cdots$，k+1 個，$\cdots$ である．したがって係数の全体で

$$1 + 2 + \cdots + (k+1) + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ 個}$$

である．ところが $\nabla^2 V$ は $n-2$ 次の同次多項式であるから，上と同様に考えて

係数の総個数は $(n-1)n/2$ 個

である．したがって係数 $a_{p,q,r}$ のうち $\nabla^2 V = 0$ という条件が科せられるのは $(n-1)n/2$ 個であり，残る

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = 2n+1 \text{ 個}$$

の係数は独立となる.

係数 $a_{p,q,r}$ を直接計算すると

$$a_{p,q,r} = \frac{1}{p!\ q!\ r!}\ \frac{\partial^{p+q+r} V}{\partial x^p\ \partial y^q\ \partial z^r} \qquad p+q+r=n \tag{4.18}$$

で与えられるが，

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\Big(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\Big)$$

より，z に関する偏導関数中 $r \geq 2$ のすべての項は，$r = 0$，もしくは $r = 1$ で x, y に関して高い偏導関数で表すことができる．よって，

$$n+1 \text{ 個の } a_{p,q,0} \quad (p+q=n) \text{ 及び } n \text{ 個の } a_{p,q,1} \quad (p+q=n-1)$$

によって他のものを表すことができる．すなわち，$a_{p,q,r}$ で $r \geq 2, \quad p+q+r=n$ の形の係数は，$p+q+r=n$ の制限下のもと $r=0$ もしくは $r=1$ の $2n+1$ 個の係数で表すことができる．

球面調和関数

直角座標から球座標に移すと

$$V = r^n f_n(\theta, \varphi) \tag{4.19}$$

となり，$f_n(\theta, \varphi)$ は $\cos\theta, \sin\theta$ の n 次の同次多項式となる．(4.19) をラプラスの方程式に代入すると

$$\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\,\frac{\partial f_n}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 f_n}{\partial\varphi^2} + n(n+1)\,f_n = 0 \tag{4.20}$$

を得る．この様な θ, φ の関数 $f_n(\theta, \varphi)$ を n **次の球面調和関数** 又は単に **球面関数** とよぶ．n 次の体球関数は n 次の球面関数に r^n をかけた形で表され，逆に n 次の球面関数に r^n をかければ n 次の体球関数になる．

球面調和関数の独立な基本解

さて (4.20) を変数分離を用いて $f_n(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\,\Phi(\varphi)$ として (4.13), (4.14) と同様にして解くと $2n+1$ 個の基本解

$$P_n(\cos\theta), \qquad {P_n}^m(\cos\theta)\cos m\varphi, \qquad {P_n}^m(\cos\theta)\sin m\varphi \qquad (m = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.21}$$

を得る．これらが互いに線形的に独立な関数であることは，単位球面上 $0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi$ で正規直交系をなすことからわかる．(4.21) に r^n をかけてもとの変数 x, y, z で書けば，いずれも x, y, z にかんして n 次の同次多項式であり，ラプラスの方程式の解より n 次の体球関数である．これらが互いに独立であることは (4.21) が直交系をなすことから明らかである．これらのことから n 次の体球関数 V は

$$V = r^n \sum_{m=0}^{n} {P_n}^m(\cos\theta)\Big(A_{n,m}\,\cos m\varphi + B_{n,m}\,\sin m\varphi\Big) \tag{4.22}$$

と表すことができる．

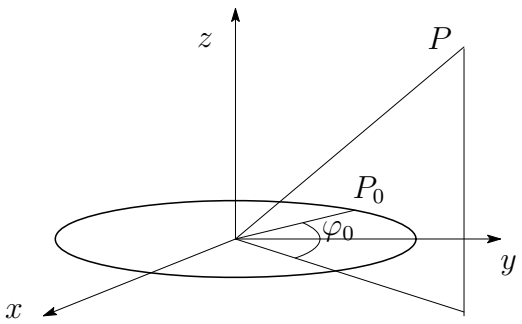

図 4.2:

4.5 球座標による円環のポテンシャル

円環の中心を原点とし，環の平面を (x, y) 平面とし垂直に z 軸をとる．円環の半径が a，物質（又は電荷）分布が一様で線密度を σ，環の微小部分を ds_0 とすると点 $P(x, y, z)$ におけるポテンシャルは

$$V(\mathbf{x}) = -\int \frac{\sigma\ ds_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}$$

である．$z \geq 0$ としても一般性を失わない．図 4.2 のように角 φ_0 をとれば

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 = R^2 + a^2 + z^2 - 2a\ R\ \cos\varphi_0 \qquad \text{但し } R^2 = x^2 + y^2 \quad (R > 0)$$

であるから

$$V(\mathbf{x}) = -\sigma\ a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi_0}{\sqrt{R^2 + a^2 + z^2 - 2a\ R\ \cos\varphi_0}}$$

と変形される．ここで

$$p^2 = (R + a)^2 + z^2 \qquad q^2 = (R - a)^2 + z^2$$

とおけば

$$R^2 + a^2 + z^2 - 2a\ R\ \cos\varphi_0 = p^2\ \sin^2\frac{\varphi_0}{2} + q^2\ \cos^2\frac{\varphi_0}{2}$$

となるから，ポテンシャルは

$$V(\mathbf{x}) = -2\sigma\ a \int_0^{\pi} \frac{d\varphi_0}{\sqrt{p^2\ \sin^2\frac{\varphi_0}{2} + q^2\ \cos^2\frac{\varphi_0}{2}}}$$

で与えられる．

z 軸上 $(R = 0)$ での級数展開

$R = 0$ のとき，すなわち　$p^2 = q^2 = a^2 + z^2$ のとき

$$V_{R=0} = -\frac{2\pi\ \sigma\ a}{\sqrt{a^2 + z^2}} = -\frac{M}{\sqrt{a^2 + z^2}} \qquad \text{但し } M = 2\pi\ \sigma\ a \tag{4.23}$$

を得る．これを級数に展開すると

$$V_{R=0} = \begin{cases} -\dfrac{M}{a}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\dfrac{z}{a}\right)^{2n} & z<a \\ -\dfrac{M}{z}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\dfrac{a}{z}\right)^{2n} & z>a \end{cases} \tag{4.24}$$

となる．

z 軸上 $(\theta=0)$ での球面調和関数による展開

(4.23) はラプラスの方程式を満足するから極座標で表せば (4.16) の重ね合わせであらわされる．円環は軸対象であるから φ に依存しないことに注意すると

$$V = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n\, r^n + \beta_n\, r^{-n-1})P_n(\cos\theta) \qquad \alpha_n,\ \beta_n : \text{定数} \tag{4.25}$$

と表すことができる．(4.23) は $\theta=0, r=z$ のときであるから

$$V_{\theta=0} = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n\, z^n + \frac{\beta_n}{z}\, z^{-n})$$

となる．これは (4.24) と一致するから

$$\alpha_{2n} = -\frac{M}{a^{2n+1}}\,\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad \alpha_{2n+1}=0, \quad \beta_n = 0 \qquad z<a$$

$$\alpha_n = 0, \quad \beta_{2n} = -Ma^{2n}\,\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad \beta_{2n+1}=0 \qquad z>a$$

となる．

一般の (r,θ) での球面調和関数による展開

(4.25) に代入すると

$$V = -\frac{M}{a}\Big\{1 - \frac{1}{2}\big(\frac{r}{a}\big)^2 P_2(\cos\theta) + \frac{3}{8}\big(\frac{r}{a}\big)^4 P_4(\cos\theta) - \frac{5}{16}\big(\frac{r}{a}\big)^6 P_6(\cos\theta) + \cdots\Big\} \quad r<a \tag{4.26}$$

$$V = -\frac{M}{r}\Big\{1 - \frac{1}{2}\big(\frac{a}{r}\big)^2 P_2(\cos\theta) + \frac{3}{8}\big(\frac{a}{r}\big)^4 P_4(\cos\theta) - \frac{5}{16}\big(\frac{a}{r}\big)^6 P_6(\cos\theta) + \cdots\Big\} \quad r>a \tag{4.27}$$

を得る．これまで $z>0$ としてポテンシャルを考えたが，ポテンシャルは $\theta=\pi/2$ に関して対称であるから

$$V(r,\theta) = V(r,\pi-\theta)$$

という関係によって $\pi/2<\theta<\pi$ に対する $V(r,\theta)$ の値を求めることができる．

4.6 球座標による薄い円板のポテンシャル

半径 a，面密度 σ の薄い円板を考える．円板のポテンシャルは半径の異なった円環のポテンシャルを加え合わせたものであるから，円板に垂直でその中心を通る z 軸上でのポテンシャルは (4.23) より

$$
\begin{aligned}
V = -\int_0^a \frac{2\pi\,\sigma\,a\,da}{\sqrt{a^2+z^2}} &= -2\pi\,\sigma\,(\sqrt{a^2+z^2}-z) \\
&= -2\pi\,\sigma\,z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}\left(\frac{a}{z}\right)^{2n} \qquad z>a \qquad (4.28)
\end{aligned}
$$

となる．前節と同様にポテンシャルは極座標で表せば (4.25) で与えられる．したがって，$\theta=0$ とおいたものと一致する．よって

$$
\alpha_n = 0, \qquad \beta_{2n-2} = \frac{(-1)^n(2n-3)!!}{(2n)!!}\,a^{2n}\,(2\pi\sigma), \qquad \beta_{2n-1}=0
$$

を得る．故にポテンシャルは

$$
V(r,\theta) = -\frac{2\pi\,\sigma\,a^2}{r}\Big\{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\big(\frac{a}{r}\big)^2P_2(\cos\theta)+\frac{1}{16}\big(\frac{a}{r}\big)^4P_4(\cos\theta)+\cdots\Big\} \quad r>a \quad (4.29)
$$

となる．$r<a$ についても同様にすると

$$
V(r,\theta) = -2\pi\,\sigma\,a\Big\{1-\big(\frac{r}{a}\big)P_1(\cos\theta)+\frac{1}{2}\big(\frac{r}{a}\big)^2P_2(\cos\theta)+\cdots\Big\} \quad r<a \qquad (4.30)
$$

となる．

4.7 両曲面のポテンシャルの関係

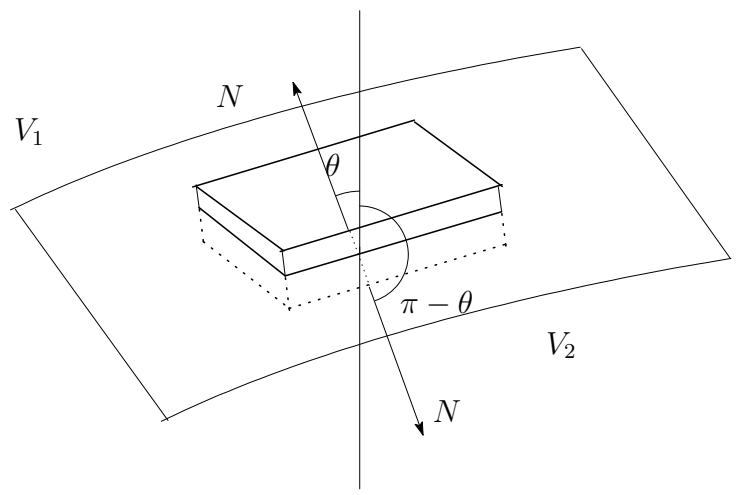

図 4.3:

ある曲面上に物質が分布してその面密度が σ であるとする．いまポテンシャル V に対して

$$(u, v, w) = \Big(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\Big)$$

とおくと，ポアッソンの方程式 (4.9) は物質密度 $\rho(\mathbf{x})$ を用いて

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 4\pi\ \rho(\mathbf{x})$$

と表すことができ

$$\int\int\int_V \Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\Big)\ dx\ dy\ dz = 4\pi \int\int\int_V \rho(\mathbf{x})\ dx\ dy\ dz$$

を得る．ここで右辺の V として，物質の分布している曲面を含む小さな薄い直方体にとり無限に薄くした極限では

$$4\pi\sigma \times \text{直方体に含まれる曲面の面積}$$

となる．

一方，ガウスの定理から

$$\int\int\int_V \Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\Big)\ dx\ dy\ dz = \int\int_S (l\ u + m\ v + n\ w)\ dS \tag{4.31}$$

が成り立つ．但し，(l, m, n) は曲面の微小要素 dS の外向きの法線の方向余弦である．ここで先と同じ極限を考えると

$$\Big(\frac{\partial V_1}{\partial N} - \frac{\partial V_2}{\partial N}\Big) \times \text{直方体に含まれる曲面の面積}$$

となる．但し，V_1, V_2 は曲面の両側におけるポテンシャルの値であり $\partial/\partial N$ は法線方向の微分を示す.（2 から 1 の向きを正とする.）したがって曲面上に分布している物質の面密度が σ であるとき

$$\frac{\partial V_1}{\partial N} - \frac{\partial V_2}{\partial N} = 4\pi\ \sigma \tag{4.32}$$

が成り立つ.

4.8 薄い球殻のポテンシャル

半径 a の薄い球殻の上に物質（又は電荷）が分布しているときポテンシャルを求めることを考える．球座標 (r, θ, φ) を用いると球殻以外の点ではポテンシャルは (4.16) の重ね合わせとして表すことができる．しかし，$r < a$ のとき，球殻から有限距離はなれた点でのポテンシャルが特異点をもつことは許されないから $\beta = 0$ である．よって

$$V_2 = \sum_{n,m=0} r^n {P_n}^m(\cos\theta)\big(\gamma_{n,m}\ \cos m\varphi + \delta_{n,m}\ \sin m\varphi\big) \qquad (0 \le m \le n,\ r < a) \tag{4.33}$$

となる．但し，$\gamma_{n,m}$ ，$\delta_{n,m}$ は定数である．そして，$r > a$ のとき，ポテンシャルは $r \to \infty$ で有限な一定値に収束しなければならないから $\alpha = 0$ である．したがって

$$V_1 = \sum_{n,m=0} r^{-n-1} P_n{}^m(\cos\theta)\big(\gamma_{n,m}{}' \ \cos m\varphi + \delta_{n,m}{}' \ \sin m\varphi\big) \qquad (0 \le m \le n,\ r > a) \tag{4.34}$$

となる．但し，$\gamma_{n,m}{}'$ ，$\delta_{n,m}{}'$ は定数である．

面密度の球面関数による表現

さて球殻の上で物質の面密度を $\sigma(\theta,\varphi)$ で表し，連続で有界変動な関数とする．4.4 節で述べたように，関数形

$$P_n{}^m(\cos\theta)\ e^{im\varphi} \qquad (0 \le m \le n)$$

が球面上で直交関数系をなすことから，$\sigma(\theta,\varphi)$ を展開して

$$\sigma(\theta,\varphi) = \sum_{n,m=0} P_n{}^m(\cos\theta)\Big(C_{n,m}\ \cos m\varphi + D_{n,m}\ \sin m\varphi\Big) \tag{4.35}$$

と表すことができ，三角関数の直交性から

$$C_{n,m} P_n{}^m(\cos\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sigma(\theta,\varphi)\ \cos m\varphi\ d\varphi$$
$$D_{n,m} P_n{}^m(\cos\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sigma(\theta,\varphi)\ \sin m\varphi\ d\varphi$$

を得る．但し，$m = 0, 1, 2, \ldots, n$ で $m = 0$ のとき分母の π は 2π に置き換える． さらにルジャンドル陪関数の直交関係 (2.54), (2.57) から

$$C_{n,m} = \frac{(2n+1)\ (n-m)!}{2\pi\ (n+m)!}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta\ \sigma(\theta,\varphi)\ \cos m\varphi\ P_n{}^m(\cos\theta)\ \sin\theta$$
$$D_{n,m} = \frac{(2n+1)\ (n-m)!}{2\pi\ (n+m)!}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta\ \sigma(\theta,\varphi)\ \sin m\varphi\ P_n{}^m(\cos\theta)\ \sin\theta$$

となる．但し，$n = 0, 1, 2, \cdots$: $m = 0, 1, 2, \ldots, n$ で $m = 0$ のとき分母の 2π は 4π に置き換える． よって $\sigma(\theta,\varphi)$ が与えられれば係数 $C_{n,m}, D_{n,m}$ は一意的に決まる．

面密度が与えられたときの V_1, V_2

次に, ラプラス方程式の解 $V_1(r,\theta,\varphi), V_2(r,\theta,\varphi)$ の関係について考える．(4.32) より N として球殻の外向きの法線にとれば $r = a$ において

$$\frac{\partial V_1}{\partial r} - \frac{\partial V_2}{\partial r} = -\sum_{n,m=0}(n+1)r^{-n-2}\ P_n{}^m(\cos\theta)\ \big(\gamma_{n,m}{}'\ \cos m\varphi + \delta_{n,m}{}'\ \sin m\varphi\big)$$
$$- \sum_{n,m=0} n r^{n-1}\ P_n{}^m(\cos\theta)\ \big(\gamma_{n,m}\ \cos m\varphi + \delta_{n,m}\ \sin m\varphi\big)$$

$$= 4\pi \sum_{n,m=0} {P_n}^m(\cos\theta) \Big(C_{n,m} \ \cos m\varphi + D_{n,m} \ \sin m\varphi \Big) \qquad r = a$$

が成り立つ．関数系 ${P_n}^m(\cos\theta)\cos m\varphi,\ {P_n}^m(\cos\theta)\sin m\varphi$ は共に直交関数系であるから互いに 1 次独立である．したがって上の関係式が成り立つための必要十分条件は

$$\begin{cases} (n+1)\ a^{-n-2}\ {\gamma_{n,m}}' + n\ a^{n-1}\ \gamma_{n,m} = -4\pi\ C_{n,m} \\ (n+1)\ a^{-n-2}\ {\delta_{n,m}}' + n\ a^{n-1}\ \delta_{n,m} = -4\pi\ D_{n,m} \end{cases}$$

である．また，ポテンシャルは位置の連続関数であるから $r = a$ で $V_1 = V_2$ となる．よって

$$\begin{cases} a^{-n-1}\ {\gamma_{n,m}}' = a^n\ \gamma_{n,m} \\ a^{-n-1}\ {\delta_{n,m}}' = a^n\ \delta_{n,m} \end{cases}$$

が成り立つ．これらの四つの式から

$$\begin{aligned} (2n+1)\ \gamma_{n,m} &= -4\pi\ a^{-n+1}\ C_{n,m} \qquad & (2n+1)\ {\gamma_{n,m}}' &= -4\pi\ a^{n+2}\ C_{n,m} \\ (2n+1)\ \delta_{n,m} &= -4\pi\ a^{-n+1}\ D_{n,m} \qquad & (2n+1)\ {\delta_{n,m}}' &= -4\pi\ a^{n+2}\ D_{n,m} \end{aligned}$$

を得る．故にポテンシャルは

$$V_1 = -4\pi a \sum_{n,m} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} {P_n}^m(\cos\theta) \Big(C_{n,m} \ \cos m\varphi + D_{n,m} \ \sin m\varphi \Big) \qquad r > a \tag{4.36}$$

$$V_2 = -4\pi a \sum_{n,m} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{n} {P_n}^m(\cos\theta) \Big(C_{n,m} \ \cos m\varphi + D_{n,m} \ \sin m\varphi \Big) \qquad r < a \tag{4.37}$$

となる．

4.9 ルジャンドル多項式の加法定理

球面上での球面関数の直交性

体球関数 V を n 次の球面関数 $f_n(\theta,\varphi)$ を用いて $V = r^n f_n(\theta,\varphi)$ と表すとき，微分方程式 (4.20) を満足する．微分方程式 (4.20) を変形すると

$$\frac{\partial^2 f_n}{\partial\theta^2} + \cot\theta\ \frac{\partial f_n}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\ \frac{\partial^2 f_n}{\partial\varphi^2} + n(n+1) f_n = 0 \tag{4.38}$$

となる．m 次の球面関数を $f_m(\theta,\varphi)$ とし，両辺に $\sin\theta\ f_m(\theta,\varphi)$ をかけると

$$\sin\theta\ f_m \frac{\partial^2 f_n}{\partial\theta^2} + \cos\theta\ f_m\ \frac{\partial f_n}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\ f_m\ \frac{\partial^2 f_n}{\partial\varphi^2} + n(n+1) f_n f_m \sin\theta = 0$$

となる．m と n をいれかえて辺々差をとると

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\Big\{\sin\theta\Big(f_m\frac{\partial f_n}{\partial\theta}-f_n\frac{\partial f_m}{\partial\theta}\Big)\Big\}+\frac{1}{\sin\theta}\Big(f_m\frac{\partial^2 f_n}{\partial\varphi^2}-f_n\frac{\partial^2 f_m}{\partial\varphi^2}\Big)$$
$$=\Big\{m(m+1)-n(n+1)\Big\}f_m f_n\sin\theta$$

を得る．両辺を θ について 0 から π まで積分すると，第一項は 0 となり

$$\int_0^\pi\frac{d\theta}{\sin\theta}\Big(f_m\frac{\partial^2 f_n}{\partial\varphi^2}-f_n\frac{\partial^2 f_m}{\partial\varphi^2}\Big)=\Big\{m(m+1)-n(n+1)\Big\}\int_0^\pi f_m f_n\ \sin\theta\ d\theta$$

となる．更に両辺を φ について 0 から 2π まで積分すると，左辺については積分順序を変更して

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi\frac{d\theta}{\sin\theta}\Big(f_m\frac{\partial^2 f_n}{\partial\varphi^2}-f_n\frac{\partial^2 f_m}{\partial\varphi^2}\Big)=\int_0^\pi\frac{d\theta}{\sin\theta}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big(f_m\frac{\partial f_n}{\partial\varphi}-f_n\frac{\partial f_m}{\partial\varphi}\Big)\ d\varphi$$

となるが，V は x,y,z の一価関数であるから球面関数の $\varphi=0$ と $\varphi=2\pi$ における値は等しいから左辺の値は 0 である．故に

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi f_m(\theta,\varphi)f_n(\theta,\varphi)\ \sin\theta\ d\theta=0\qquad m\neq n \tag{4.39}$$

が成り立つ．すなわち，次元の異なる球面関数は球面上で直交する．

$f_n\cdot g_n$ の球面上での積分

次に，二つの n 次の球面関数 f_n,g_n の積を球面上で積分することを考える．それぞれの n 次の球面関数を

$$f_n(\theta,\varphi)=\sum_{m=0}^n\big(A_m\ \cos m\varphi+B_m\ \sin m\varphi\big){P_n}^m(\cos\theta) \tag{4.40}$$

$$g_n(\theta,\varphi)=\sum_{m=0}^n\big(C_m\ \cos m\varphi+D_m\ \sin m\varphi\big){P_n}^m(\cos\theta) \tag{4.41}$$

と表し，$f_n\cdot g_n$ を φ に関して 0 から 2π まで積分をすると，三角関数の直交関係から

$$\int_0^{2\pi}f_n(\theta,\varphi)g_n(\theta,\varphi)\ d\varphi\ =\ 2\pi A_0C_0\Big\{P_n(\cos\theta)\Big\}+\pi\sum_{m=1}^n\big(A_mC_m+B_mD_m\big)\Big\{{P_n}^m(\cos\theta)\Big\}^2$$

となる．さらに両辺に $\sin\theta$ をかけて 0 から π まで積分すると，${P_n}^m(\cos\theta)$ の直交関係 (2.54), (2.57) を用いて

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi f_n(\theta,\varphi)g_n(\theta,\varphi)\ \sin\theta\ d\theta$$
$$=\frac{4\pi}{2n+1}\Big\{A_0C_0+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^n\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\ (A_mC_m+B_mD_m)\Big\} \tag{4.42}$$

を得る．

$f_n \cdot P_n(\cos\theta)$ の球面上での積分

さて (θ, φ) の方向が定方向 (θ', φ') とのなす角を ω とすると

$$\cos\omega = \cos\theta \cdot \cos\theta' + \sin\theta\ \sin\theta'\ \cos(\varphi - \varphi')$$

が成り立つ．$f_n(\theta, \varphi)$ を n 次の球面関数として，積分

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f_n(\theta, \varphi) P_n(\cos\omega)\ \sin\theta\ d\theta$$

を考える．この積分は球面全体について行うから極座標の軸（$\theta = 0$ の線）　をどの方向にとってもさしつかえない．そこでこれを (θ', φ') の方向に選び，点 (θ, φ) の新座標を (ω, ψ) とする．また $f_n(\theta, \varphi)$ を (ω, ψ) で表したものを $\bar{f}_n(\omega, \psi)$ とすれば

$$I = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \bar{f}_n(\omega, \psi) P_n(\cos\omega)\ \sin\omega\ d\omega$$

となる．$\bar{f}_n(\omega, \psi)$ は n 次の球面関数であるから

$$\bar{f}_n(\omega, \psi) = A_0 P_n(\cos\omega) + \sum_{m=1}^{n} (A_m\ \cos m\psi + B_m\ \sin m\psi)\ {P_n}^m(\cos\omega)$$

と展開できる．$\cos\omega = 1$ とおくと ${P_n}^m(1) = 0 \quad (m \geq 1)$ であるから

$$A_0 P_n(1) = A_0 = \bar{f}_n(\omega = 0, \psi) = f_n(\theta', \varphi')$$

を得る．(4.42) で $g_n(\omega, \varphi) = P_n(\cos\omega)$ ，すなわち $C_0 = 1$ で他の係数は 0 とみれば

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \bar{f}_n(\omega, \psi) P_n(\cos\omega)\ \sin\omega\ d\omega = \frac{4\pi}{2n+1}\ A_0 = \frac{4\pi}{2n+1}\ f_n(\theta', \varphi') \tag{4.43}$$

が成り立つ．故に

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} f_n(\theta, \varphi) P_n(\cos\omega)\ \sin\theta\ d\theta = \frac{4\pi}{2n+1}\ f_n(\theta', \varphi') \tag{4.44}$$

が成り立つ．

球面関数の加法定理

また $P_n(\cos\omega)$ は (θ', φ') を固定して (θ, φ) の関数と見なせば n 次の球面関数であるから

$$P_n(\cos\omega) = \sum_{m=0}^{n} (A_m\ \cos m\varphi + B_n\ \sin m\varphi)\ {P_n}^m(\cos\theta)$$

と展開でき係数 $A_m, \quad B_m$ は (θ', φ') の関数となる．事実 $f_n(\theta, \varphi) = {P_n}^m(\cos\theta)\cos m\varphi$ として (4.44) の左辺の計算をすると

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} {P_n}^m(\cos\theta)\ \cos m\varphi \left\{ \sum_{k=0}^{n} (A_k\ \cos k\varphi + B_k\ \sin k\varphi)\ {P_n}^k(\cos\theta) \right\} \sin\theta\ d\theta$$

$$= \int_0^\pi \pi A_m \Big\{ {P_n}^m(\cos\theta) \Big\}^2 \sin\theta \, d\theta$$
$$= \frac{2\pi(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} \, A_m$$

但し，$m=0$ のとき 2π は 4π になる．

となり，(4.44) の結果から

$$\frac{2\pi(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} \, A_m = \frac{4\pi}{2n+1} \, f_n(\theta', \varphi') = \frac{4\pi}{2n+1} \, {P_n}^m(\cos\theta') \, \cos m\varphi'$$

を得る．故に

$$A_m = \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} \, {P_n}^m(\cos\theta') \, \cos m\varphi'$$

但し，$m=0$ のとき係数 2 は現れない．

が成り立つ．また $f_n(\theta,\varphi) = {P_n}^m(\cos\theta) \, \sin m\varphi$ として上と同様に計算すれば

$$B_m = \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} \, {P_n}^m(\cos\theta') \, \sin m\varphi'$$

を得る．よって $P_n(\cos\omega)$ の展開式に代入すると

$$P_n(\cos\omega) = P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta') + 2\sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \, {P_n}^m(\cos\theta){P_n}^m(\cos\theta') \, \cos m(\varphi-\varphi') \tag{4.45}$$

但し. $\cos\omega = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta \, \sin\theta' \, \cos(\varphi-\varphi')$

を得る．この関係を **球関数の加法定理** とよぶ.

4.10 円柱座標による薄い円板のポテンシャル

直角座標 (x,y,z) にたいして

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z, \quad r > 0, \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

によって決定される座標 (r,θ,z) を **円柱座標** という．薄い円板を $z=0$ の平面にとれば，$z \neq 0$ でのポテンシャル関数 V はラプラスの方程式を満たす.

ラプラス方程式の一般解

変数分離法を用いて

$$V = R(r) \, \Theta(\theta) \, Z(z)$$

とおけば，ラプラスの方程式は

$$\frac{1}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

となる．分離定数を $\alpha^2 \quad (\alpha > 0)$ とすると

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = \alpha^2 Z$$
$$\frac{r^2}{R}\left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right) + \alpha^2 r^2 = -\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}$$

を得る．第二式の分離定数を n^2 とすると

$$\Theta = A\ \cos n\theta + B\ \sin n\theta \tag{4.46}$$
$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\left(\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0 \tag{4.47}$$

となる．

関数 $\Theta(\theta)$ について

Θ の $\theta = 0, 2\pi$ における値は等しいから n は整数でなくてはならない．

関数 $Z(z)$ について

$Z(z)$ について考えると，二つの独立解 $e^{\alpha z}$, $e^{-\alpha z}$ を持つが

$$z \to +\infty \text{ のとき } e^{\alpha z} \to +\infty$$
$$z \to -\infty \text{ のとき } e^{-\alpha z} \to +\infty$$

となりポテンシャル としては不適である．よって $|z| \to \infty$ のとき有限値に収束する解は

$$Z(z) = e^{-\alpha|z|}$$

である．

関数 $R(r)$ について

(4.47) において $z = \alpha r$ とすれば (1.1) に示すベッセルの微分方程式を得る．よって二つの独立解は

$$J_n(\alpha r), \qquad Y_n(\alpha r)$$

である．しかし，(1.8) で示すように $Y_n(\alpha r)$ は $r = 0$ で特異点を持つから不適である．ゆえに

$$R(r) = J_n(\alpha r)$$

を得る．

よってラプラスの方程式の一つの解として

$$J_n(\alpha r)\ e^{-\alpha|z|}\ (A\ \cos n\theta + B\ \sin n\theta)$$

を得る．α, n の値をもつ解を重ね合わせると一般解は

$$V(r,\theta,z) = \sum_n \int_0^\infty J_n(\alpha r)\ e^{-\alpha|z|}\left(A_n(\alpha)\ \cos n\theta + B_n(\alpha)\ \sin n\theta\right) d\alpha \tag{4.48}$$

と表される．

面密度 $\sigma(r,\theta)$ が与えられたときのポテンシャル

次に面密度 $\sigma(r,\theta)$ がフーリェ級数

$$\sigma(r,\theta)=\sum_n\Big(f_n(r)\ \cos n\theta+g_n(r)\ \sin n\theta\Big)$$

に展開されるとき $f_n(r),\ g_n(r)$ と $A_n(\alpha),\ B_n(\alpha)$ との関係を求める．ここで，$f_n(r),\ g_n(r)$ は r の既知関数とする．$z\gtrless 0$ に応じて

$$\frac{\partial V}{\partial z}=\sum_n\int_0^\infty J_n(\alpha r)\ e^{\mp\alpha z}\ \Big(A_n(\alpha)\ \cos n\theta+B_n(\alpha)\ \sin n\theta\Big)\ (\mp\alpha)\ d\alpha$$

であり，$z=0$ において (4.32) が成り立つから

$$\begin{cases}2\displaystyle\int_0^\infty J_n(\alpha r)A_n(\alpha)\ \alpha\ d\alpha &=-4\pi\ f_n(r)\\[2ex] 2\displaystyle\int_0^\infty J_n(\alpha r)B_n(\alpha)\ \alpha\ d\alpha &=-4\pi\ g_n(r)\end{cases}\tag{4.49}$$

を得る．両辺に $J_n(\rho r)\ r$ を掛けて積分すると，(1.15) のハンケルの公式から

$$\int_0^\infty J_n(\rho r)\ r\ dr\int_0^\infty J_n(\alpha r)A_n(\alpha)\ \alpha\ d\alpha=A_n(\rho)=-2\pi\int_0^\infty J_n(\rho r)f_n(r)\ r\ dr\tag{4.50}$$

$$\int_0^\infty J_n(\rho r)\ r\ dr\int_0^\infty J_n(\alpha r)B_n(\alpha)\ \alpha\ d\alpha=B_n(\rho)=-2\pi\int_0^\infty J_n(\rho r)g_n(r)\ r\ dr\tag{4.51}$$

が得られる．これらのことから $\sigma(r,\theta)$ が与えられたときフーリェ展開係数 $f_n(r),g_n(r)$ から $A_n(\alpha),B_n(\alpha)$ が計算され，(4.48) によってポテンシャルは求められる．

面密度 $\sigma(r,\theta)=e^{-a^2r^2}\ (a>0)$ が与えられたとき

例として面密度が $\sigma(r,\theta)=e^{-a^2r^2},\quad a>0$ である場合を考える．密度分布は軸対称であるから，先の $\sigma(r,\theta)$ のフーリェ展開において $f_0(r)$ のみが 0 でなく，他の $f_n(r),\ g_n(r)$ は 0 となる．(4.50) より

$$\begin{aligned}A_0(\rho)&=-2\pi\int_0^\infty J_0(\rho r)\ e^{-a^2r^2}\ r\ dr\\&=-2\pi\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{(m!)^2\ 2^{2m}}\int_0^\infty(\rho^2r^2)^m\ e^{-a^2r^2}\ r\ dr\\&=-2\pi\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{(m!)^2\ 2^{2m}}\ \frac{\rho^{2m}}{2a^{2m+2}}\ \Gamma(m+1)=-\ \frac{\pi}{a^2}\ e^{-\rho^2/4a^2}\end{aligned}\tag{4.52}$$

となる．これを (4.48) に代入して

$$V(r,\theta,z)=-\ \frac{\pi}{a^2}\int_0^\infty J_0(\alpha r)\ e^{-\alpha|z|}\ e^{-\alpha^2/4a^2}\ d\alpha$$

を得る．一般の z の値に対しては既知の関数で表現することはできないが $z=0$ ではこの積分の値を計算することができる．

特に $z=0$ の場合

ベッセル関数の積分表示 (1.13) より

$$J_0(\alpha r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(\alpha r\cos\theta)\ d\theta$$

であるから

$$\begin{aligned}
V(r,\theta,0) &= -\frac{\pi}{a^2}\int_0^{\infty} J_0(\alpha r)\ e^{-\alpha^2/4a^2}\ d\theta \\
&= -\frac{1}{a^2}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \cos(\alpha r\cos\theta)\ e^{-\alpha^2/4a^2}\ d\alpha \\
&= -\frac{\sqrt{\pi}}{a}\ e^{-r^2a^2/2}\int_0^{\pi} e^{(-r^2a^2\cos 2\theta)/2}\ d\theta \\
&(\ 2\theta=\varphi \text{ とおくと}) \\
&= -\frac{\sqrt{\pi}}{a}\ e^{-r^2a^2/2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(e^{-r^2a^2\cos(\varphi/2)} + e^{r^2a^2\cos(\varphi/2)}\right) d\varphi \\
&= -\frac{\pi\sqrt{\pi}}{a}\ e^{-r^2a^2/2}\ J_0(i\frac{a^2r^2}{2}) = -\frac{\pi\sqrt{\pi}}{a}\ e^{-r^2a^2/2}\ I_0(\frac{a^2r^2}{2})
\end{aligned}$$

となる．

第5章　熱伝導論

熱伝導は特殊関数がその重要性を発揮する分野である．熱伝導の基礎方程式は拡散方程式や中性子の輸送方程式と形式的には同一であり，物理学上重要な問題である．この章で温度，比熱という言葉をもちいるが，それらの言葉を置き換えるだけで他の現象に応用できるのである．さて，この章では熱伝導理論の基本的命題として考えられている，等温面での熱流束が $-K\dfrac{\partial T}{\partial N}$ (K : 熱伝導係数) で得られることを認めて理論を展開する．そして，ここでは熱膨張が重要となる大きな温度変化については扱わないことにする．

5.1　熱伝導の基礎方程式

温度が一定値である曲面を等温面とよぶ．等温面は無限個存在するが，異なった温度に対する等温面は決して交わることはない．一般にある単位面積を通して単位時間に流れる熱量を **熱流束** という．熱伝導係数を K，物体内の温度を T，等温面に垂直な方向微分を $\partial/\partial N$ とするとき，等温面の一方 S_1 から S_2 への方向を正とすると，S_1 から S_2 への熱流束は

$$-K\frac{\partial T}{\partial N}$$

で与えられる．

必ずしも等温面の一部でない微小な面積 dS を考えて，その面積を通じて単位時間

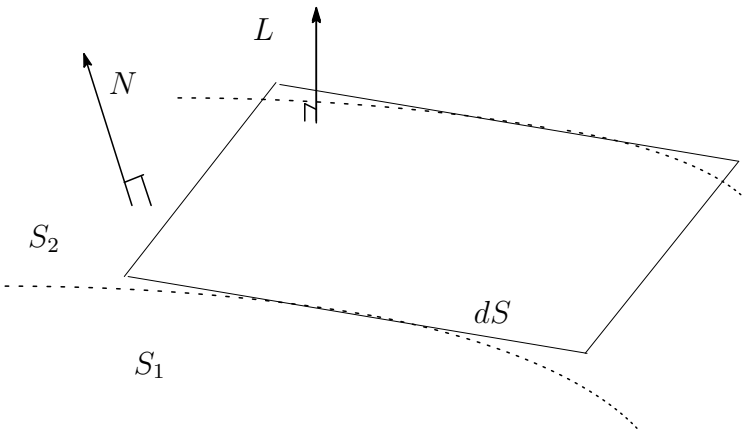

図 5.1:

に流れる熱量を求める．その面積の単位法線を $\mathbf{L}$，その点を通る等温面の単位法線を

$\mathbf{N}$ とすると dS を通過する熱量は，単位時間あたり

$$-K\,(\mathbf{L}\cdot\mathbf{N})\,\frac{\partial T}{\partial N}\,dS = -K\,(\mathbf{L}\cdot\mathrm{grad}\,T)\,dS \tag{5.1}$$

である．但し，(·) は内積を示す．S を任意の閉曲面とし，その内部に熱源がないとすると，S を通して時間 dt の間に流入した熱量は熱力学の第一法則により S で囲まれた部分の熱量の増加に等しい．この増加分は

$$dt\int_V \rho\,C_v\,\frac{\partial T}{\partial t}\,d\tau \qquad \text{但し } d\tau = dx\,dy\,dz,\quad \rho:\text{密度},\quad C_v:\text{定積比熱} \tag{5.2}$$

である．S を通して流入する熱量は $\mathbf{L}$ を外向き単位法線とすればガウスの定理より

$$dt\int_S K\,\mathbf{L}\cdot\mathrm{grad}\,T\,dS = dt\int_V \mathrm{div}(K\,\mathrm{grad}\,T)\,d\tau$$

となる．よって

$$\int_V\left\{\mathrm{div}(K\,\mathrm{grad}\,T) - \rho\,C_v\,\frac{\partial T}{\partial t}\right\}d\tau = 0$$

を得る．しかし，体積は任意であるからかっこの中は 0 である．すなわち

$$\rho\,C_v\,\frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}(K\,\mathrm{grad}\,T) \tag{5.3}$$

を得る．これが熱伝導の基礎方程式である．特に熱伝導係数 K が位置によらず，また $\rho\,C_v$ も一定値をとるとき，この方程式は

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\,\nabla^2 T, \qquad \kappa = \frac{K}{\rho\,C_v}:\text{温度伝導度係数} \tag{5.4}$$

という形をとる．考えている物体が熱的に定常になったとき $\partial T/\partial t = 0$ より，(5.4) はラプラスの方程式に帰着される．さらに，体積 $d\tau$ から発生する熱量が $Qd\tau\cdot dt$ であるときは

$$\rho\,C_v\frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}(K\,\mathrm{grad}\,T) + Q \tag{5.5}$$

が熱伝導の基礎方程式となる．

5.2 境界での熱の輻射

異なった物理的性質（熱伝導係数，比熱，密度）をもつ二つの物体が接触しているとき満たされる条件考える．境界条件には二つの事柄が考えられ，第一は境界で 温度 T は連続であること，第二は入ってくる熱流束と出ていく熱流束は熱の源がない限り同じであることである．物体が真空と接しているとき，物体表面を黒体と見なすことができれば，その表面の単位面積から毎秒失われる熱量は $\sigma\,T^4$ (σ : ステファン・ボルツマン定数) である． 現実の物体はこれに E（輻射能）を掛けた割合で熱を失うから，境界条件は

$$-K\frac{\partial T}{\partial N} = \sigma\,E\,T^4 \tag{5.6}$$

となる．又，物体が温度 T_0 の黒体容器の中にあればそれは $\sigma\ E\ {T_0}^4$ の割合で熱を吸収する．したがって境界条件は

$$-K\frac{\partial T}{\partial N} = \sigma\ E\ (T^4 - {T_0}^4)$$

となる．$T - T_0$ は T_0 に比して小とすれば，この境界条件は近似的に

$$-K\frac{\partial T}{\partial N} = 4\sigma\ E\ {T_0}^3(T - T_0)$$

又は

$$\frac{\partial T}{\partial N} + h(T - T_0) = 0 \qquad \text{但し } h \equiv \frac{4\sigma\ E\ {T_0}^3}{K} \tag{5.7}$$

となる．

5.3 無限円柱内の定常状態

定常状態に対する熱伝導の方程式はラプラスの方程式である．円柱の中心が z 軸である円柱座標を用いると方程式は

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \tag{5.8}$$

となる．温度 T が z, θ に依存しない場合は，上の方程式は

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{dT}{dr}\right] = 0$$

と変形できるから，これを積分して解

$$T(r) = A\ \log r + B \qquad A, B : \text{任意定数}$$

を得る．

円柱が $r = 0$ までつまっている場合

もし円柱が $r = 0$ までつまっていれば $A = 0$ である．そのとき定常な温度分布は

$$T(r) = B \qquad B\ :\ r = b \text{での温度}$$

となる．

円柱が中空の場合

円柱が中空で，内径 $r = a$ で $T = T_1$，外径 $r = b$ で $T = T_2$ に温度が保たれていれば

$$A\ \log a + B = T_1 \quad , \quad A\ \log b + B = T_2$$

を連立して解

$$T = \frac{T_2 - T_1}{\log(b/a)} \cdot \log(r/a) + T_1 \tag{5.9}$$

を得る．

輻射によって熱が失われるとき

$r=b$で温度が与えられる代わりに，温度T_2である媒質に輻射によって熱が失われるとき (5.7) から

$$\frac{\partial T}{\partial r}+h\,(T-T_2)=0 \qquad r=b \tag{5.10}$$

が成り立つから

$$\begin{cases} T_1=A\ \log a+B \\ \dfrac{A}{b}+h\Big\{(A\ \log b+B)-T_2\Big\}=0 \end{cases}$$

を連立して解

$$T=\frac{T_1\big\{1+hb\ \log(b/r)\big\}+hb\,T_2\ \log(r/a)}{1+hb\ \log(b/a)} \tag{5.11}$$

を得る．内径が$a=0$であれば明らかに$T_1=T_2$でなければならない．

5.4 無限円柱での一般解

次に，つまった無限円柱の初期条件が与えられたとき，時刻$t=0$に温度分布が与えられたときの定常状態への到達について考える．$r=b$で温度Tが0で一定温度に保たれていれば，その温度との差を考えればそれは同一の方程式を満足し$r=b$で0となるから，$r=b$で温度$T=0$としても一般性を失わない．

いま温度Tはz,θに依存しない場合を考えているから，熱伝導の方程式は

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{5.12}$$

であるから，変数分離し

$$T=e^{-\kappa\alpha^2 t}R(r)$$

とおくと，Rに関する微分方程式は

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial R}{\partial r}+\alpha^2 R=0 \tag{5.13}$$

を得る．ベッセルの微分方程式 (1.1) より，一般解は

$$J_0(\alpha r), \qquad Y_0(\alpha r)$$

の１次結合で表される．しかし，$r=0$で解は有限でなければならないから$Y_0(\alpha r)$は除かれる．よって一つの解

$$T=e^{-\kappa\alpha^2 t}\ J_0(\alpha r)$$

を得る．ここでαは変数分離の定数で任意であるが，$r=b$で$T=0$という条件から，αは超越方程式

$$J_0(\alpha b)=0 \tag{5.14}$$

の根であり，無限個の実数根 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ である．どの α に対しても境界条件は満足されるから，偏微分方程式の一般解は

$$e^{-\kappa\alpha_n^2 t}\ J_0(\alpha_n r)$$

の重ね合わせで得られる．したがって解は

$$T(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\ e^{-\kappa\alpha_n^2 t}\ J_0(\alpha_n r) \tag{5.15}$$

となる．境界条件として $r = b$ で $T = 0$ の代わりに輻射の条件 (5.7) が与えられるとき，α は超越方程式

$$\alpha J_0{}'(\alpha b) + h\ J_0(\alpha b) = 0 \tag{5.16}$$

を満足しなければならない．

5.5 境界条件が与えられたとき

初期温度 $f(r)$，表面温度 0 であるとき，偏微分方程式 (5.12) の一般解 (5.15) に現れる任意定数 A_n は，ベッセル関数の直交性を用いて求めることができる．いま

$$T(r, t=0) = f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\ J_0(\alpha_n r)$$

とする．ここで $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ は (5.14) の根である．関数列

$$J_0(\alpha_0 r), \quad J_0(\alpha_1 r), \quad J_0(\alpha_2 r) \ldots$$

の直交性とノルムの関係から

$$A_n = \frac{2}{\left[b\ J_0{}'(\alpha_n b)\right]^2} \int_0^b f(r) J_0(\alpha_n r)\ r\ dr$$

を得る．(5.15) に代入して，初期温度 $f(r)$，表面温度 0 のときの解

$$T(r,t) = \frac{2}{b^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n r)}{\left[J_0{}'(\alpha_n b)\right]^2}\ e^{-\kappa\alpha_n^2 t} \int_0^b f(r) J_0(\alpha_n r)\ r\ dr \tag{5.17}$$

を得る．また輻射条件が成り立つときの解は

$$T(r,t) = \frac{2}{b^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{{\alpha_n}^2 J_0(\alpha_n r)}{(h^2 + {\alpha_n}^2) {J_0}^2(\alpha_n b)}\ e^{-\kappa\alpha_n^2 t} \int_0^b f(r) J_0(\alpha_n r)\ r\ dr \tag{5.18}$$

となる．但し α_n は (5.16) の根である．

5.6 絶縁体でおおわれた円柱内の熱伝導

円柱の表面が熱の絶縁物でおおわれているとき，そこでの熱流束は 0 であるから $\dfrac{\partial T}{\partial r}=0$ でなければならない．その場合，解は形式的に (5.18) で $h=0$ とおいて得られると考えられるが，$h=0$ とすると $t\to\infty$ で T は 0 となる．しかし，これは円柱の最初にもっていた熱量は保存されるはずであるから矛盾する．この矛盾を解決するために，熱伝導の方程式 (5.12) の一つの解が

$$T(r,t)=C \qquad C\ :\ \text{定数}$$

であることから

$$T(r,t)=C+\frac{2}{b^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_n r)}{{J_0}^2(\alpha_n b)}\,e^{-\kappa\alpha_n^2 t}\int_0^b f(r)J_0(\alpha_n r)\ r\ dr \tag{5.19}$$

も (5.12) の解で境界条件

$$T(r,t=0)=f(r), \qquad \left[\frac{\partial T}{\partial r}\right]_{r=b}=0$$

を満たす．円柱の単位長さあたりの熱量が保存されるという条件から

$$\int_0^b T\ r\ dr=\int_0^b f(r)\ r\ dr$$

と表すことができる．(1.19) から

$$\int_0^z wJ_0(w)\ dw=\int_0^z \frac{d}{dw}\big[wJ_1(w)\big]\ dw=-zJ_0{}'(z)$$

を得る．また (5.16) から $h=0$ とすると $\alpha J_n{}'(\alpha b)=0$ であるから

$$\int_0^b J_0(\alpha_n r)\ r\ dr=0$$

をうる．したがって

$$\int_0^b T\ r\ dr=\int_0^b\left\{C\ r+\frac{2}{b^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\kappa\alpha_n^2 t}\displaystyle\int_0^b f(r)J_0(\alpha_n r)\ r\ dr}{{J_0}^2(\alpha_n b)}\ J_0(\alpha_n r)\ r\right\}dr=\frac{b^2C}{2}$$

となるから

$$C=\frac{2}{b^2}\int_0^b f(r)\ r\ dr$$

を得る．ゆえに

$$T(r,t)=\frac{2}{b^2}\int_0^b f(r)\ r\ dr+\frac{2}{b^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_n r)}{{J_0}^2(\alpha_n b)}\,e^{-\kappa\alpha_n^2 t}\int_0^b f(r)J_0(\alpha_n r)\ r\ dr \tag{5.20}$$

を得る．

5.7 中空円柱内の熱の流れ

$t=0$での温度分布 $f(r)$ が与えられ，内径，外径が a,bで，$r=a,\ b$での温度が $T_1,\ T_2$ に保たれているとき，どのように温度分布が定常状態に近づくかを考える．$r=a,b$での温度がそれぞれ T_1,T_2 に保たれているときの定常温度分布は (5.11) で与えられ，それを $T_S(r)$ で表す．そして

$$T(r,t)=T_C(r,t)+T_S(r)$$

とおき (5.12) に代入すると，T_C に関する方程式

$$\frac{\partial T_C}{\partial t}=\kappa\left(\frac{\partial^2 T_C}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial T_C}{\partial r}\right)\qquad a\le r\le b$$

を得る．T_C に関する境界条件は

$$T_C(a,t)\ =\ T_C(b,t)=0$$

である．ここで，

$$T_C(r,t)=e^{-\kappa\alpha^2 t}R(r)$$

とおくと，$R(r)$ は

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\,\frac{dR}{dr}+\alpha^2R=0$$

を満たす．これより一般解

$$R(r)=A\ J_0(\alpha r)+B\ Y_0(\alpha r)$$

を得る．境界条件から

$$\begin{cases}A\ J_0(\alpha a)+B\ Y_0(\alpha a) & =0\\ A\ J_0(\alpha b)+B\ Y_0(\alpha b) & =0\end{cases}$$

であるから，A,B を消去して個有値方程式

$$J_0(\alpha a)Y_0(\alpha b)-Y_0(\alpha a)J_0(\alpha b)=0 \tag{5.21}$$

を得る．この方程式も無限個の実根 $\alpha_0,\alpha_1,\ldots$ をもっていることが知られている．これらの許される α の値に対して

$$\frac{A}{B}=-\frac{Y_0(\alpha a)}{J_0(\alpha a)}=-\frac{Y_0(\alpha b)}{J_0(\alpha b)}$$

が成り立ち

$$R(r)=J_0(\alpha r)-\frac{J_0(\alpha a)}{Y_0(\alpha a)}Y_0(\alpha r) \tag{5.22}$$

を得る．よって許される α に対して重ね合わせて

$$T_C=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\ e^{-\kappa\alpha_n^2 t}\left\{J_0(\alpha_n r)-\frac{J_0(\alpha_n a)}{Y_0(\alpha_n a)}Y_0(\alpha_n r)\right\} \tag{5.23}$$

を得る．但し，A_n は任意定数である．

超越方程式 $R(\alpha_n r)$ の直交性とノルム

さて，超越方程式 (5.21) の根 α_n に対応する $R(r)$ を，あらためて $R(\alpha_n r)$ と表せば，$R(\alpha_n r)$ は互いに直交する．なぜなら，$R(\alpha r)$ は $J_0(\alpha r)$ と同じ微分方程式を満足するから，ベッセル関数の直交関係を導いたときと同様にすると

$$\Big[r\left\{\frac{dR(\alpha r)}{dr}R(\beta r)-\frac{dR(\beta r)}{dr}R(\alpha r)\right\}\Big]_{r=a}^{r=b}=(\beta^2-\alpha^2)\int_a^b r\ R(\alpha r)R(\beta r)\ dr \tag{5.24}$$

を得る．左辺は超越方程式 (5.21) から 0 となる．α,β を $\alpha_0,\alpha_1,\ldots$ に置き換えて

$$\int_a^b r\ R(\alpha_n r)R(\alpha_m r)\ dr=0 \qquad \alpha_n\neq\alpha_m \tag{5.25}$$

を得る．

また，$R(\alpha_n r)$ のノルムは (5.24) で $\beta\to\alpha$ とすると求めることができる．

$$\begin{aligned}\int_a^b r\ R^2(\alpha r)\ dr&=\lim_{\beta\to\alpha}\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\Big[r\left\{\alpha R'(\alpha r)R(\beta r)-\beta R'(\beta r)R(\alpha r)\right\}\Big]_{r=a}^{r=b}\\&=\lim_{\beta\to\alpha}\frac{1}{2\beta}\Big[r\left\{\alpha R'(\alpha r)\ r\ R'(\beta r)-R'(\beta r)R(\alpha r)-\beta r\ R''(\beta r)R(\alpha r)\right\}\Big]_{r=a}^{r=b}\\&=\frac{1}{2}\Big[\left\{r\ R'(\alpha r)\right\}^2\Big]_{r=a}^{r=b}\end{aligned}$$

であるから

$$\int_a^b r\ R^2(\alpha_n r)\ dr=\frac{1}{2{\alpha_n}^2}\Big[\big(r\ \frac{dR}{dr}\big)^2\Big]_{r=a}^{r=b}$$

を得る．ここで，ベッセル関数のロンスキアンの関係式 (1.49 をもちいて

$$\begin{aligned}\Big[\frac{dR(\alpha_n r)}{dr}\Big]_{r=a}&=\alpha_n\Big[{J_0}'(\alpha_n a)-\frac{J_0(\alpha_n a)}{Y_0(\alpha_n a)}\ {Y_0}'(\alpha_n a)\Big]\\&=\frac{\alpha_n}{Y_0(\alpha_n a)}\Big[Y_0(\alpha_n a){J_0}'(\alpha_n a)-J_0(\alpha_n a){Y_0}'(\alpha_n a)\Big]\\&=-\frac{2}{Y_0(\alpha_n a)\ a\pi}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_a^b r\ R^2(\alpha_n r)\ dr&=\frac{1}{2{\alpha_n}^2}\Big[\frac{4}{\pi^2}\Big(\frac{1}{{Y_0}^2(\alpha_n b)}-\frac{1}{{Y_0}^2(\alpha_n a)}\Big)\Big]\\&=\frac{2}{\pi^2{\alpha_n}^2}\ \frac{{J_0}^2(\alpha_n a)-{J_0}^2(\alpha_n b)}{{Y_0}^2(\alpha_n b){J_0}^2(\alpha_n a)}\end{aligned} \tag{5.26}$$

を得る．

初期温度 $f(r)$ が与えられたとき

まず簡単のため

$$T_S(a)=T_S(b)=0$$

に保たれている場合を考えると

$$T_S(r) = 0$$

である．(5.23) で $t = 0$ とすると

$$T_C(r, t = 0) = f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \; R(\alpha_n r)$$

であり，$R(\alpha_n r)\, r$ をかけて a から b まで積分すると

$$\int_a^b f(r) R(\alpha_n r)\; r\; dr = A_n \frac{2}{\pi^2 {\alpha_n}^2} \; \frac{{J_0}^2(\alpha_n a) - {J_0}^2(\alpha_n b)}{{Y_0}^2(\alpha_n b) {J_0}^2(\alpha_n a)}$$

となるから

$$A_n = \frac{\pi^2 {\alpha_n}^2}{2} \; \frac{{Y_0}^2(\alpha_n b) {J_0}^2(\alpha_n a)}{{J_0}^2(\alpha_n a) - {J_0}^2(\alpha_n b)} \int_a^b r\; f(r) \Big(J_0(\alpha_n r) - \frac{J_0(\alpha_n b)}{Y_0(\alpha_n b)}\; Y_0(\alpha_n r) \Big)\; dr$$

を得る．したがって，$r = a, b$ で温度が 0，初期温度分布 $f(r)$ のとき

$$\begin{aligned} T(r, t) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(Y_0(\alpha_n a) J_0(\alpha_n r) - J_0(\alpha_n b) Y_0(\alpha_n r) \Big)\; e^{-\kappa \alpha_n^2 t}\; {\alpha_n}^2 \\ \times \frac{{J_0}^2(\alpha_n a)}{{J_0}^2(\alpha_n a) - {J_0}^2(\alpha_n b)} \int_a^b r\; f(r) \Big(Y_0(\alpha_n a) J_0(\alpha_n r) - J_0(\alpha_n b) Y_0(\alpha_n r) \Big)\; dr \end{aligned} \tag{5.27}$$

という結果を得る．

次に

$$T_S(a) = T_1, \qquad T_S(b) = T_2$$

に保たれているときは

$$T_C(r, t = 0) = f(r) - T_S(r)$$

であるから，初期温度が $f(r) - T_S(r)$ で，$r = a,\ b$ で温度が 0 に保たれているのと全く同じである．したがって，(5.27) の $f(r)$ の代わりに $f(r) - T_S(r)$ とすればよい．但し，$T_S(r)$ は (5.11) で与えられる．

5.8 表面で一定の熱流束がある場合

表面から一定の熱量が加えられている中心までつまった円柱内の温度変化を考える．与えられた熱流束を F_0 とすると，円柱の表面では

$$K \frac{\partial T}{\partial r} = F_0 \qquad r = b \tag{5.28}$$

が成り立つ．つまった円柱の場合の一般解は (5.15) で得られるが，α が 0 でない $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ を考えても，

$$t \to \infty \text{ のとき } T(r, t) \to 0$$

となり境界条件を満足しない．そこで形式的に $\alpha = 0$ に対応する項を求めて境界条件を満たすことを考える．そのために，

$$\alpha \to 0 \text{ のときの } Ae^{-\kappa\alpha^2 t} J_0(\alpha r) \text{ の特殊解}$$

を考える．指数関数とベッセル関数を無限級数展開すると

$$\begin{aligned} A\, e^{-\kappa\alpha^2 t}\, J_0(\alpha r) &= A\Big\{1 - \kappa\alpha^2 t + \frac{1}{2}\big(\kappa\alpha^2 t\big)^2 - \cdots\Big\}\Big\{1 - \big(\frac{\alpha r}{2}\big)^2 + \frac{1}{4}\big(\frac{\alpha r}{2}\big)^4 - \cdots\Big\} \\ &= A - A\Big(\kappa\alpha^2 t + \frac{\alpha^2 r^2}{4}\Big) + \cdots \qquad (\cdots \text{は } \alpha \text{ の高次の項}) \end{aligned}$$

となる．定数は何であっても熱伝導の解となるから除き，$-A\alpha^2$ を新たに A と書くと

$$A\big(\kappa t + \frac{r^2}{4}\big) + \cdots$$

となり，$\alpha \to 0$ とすると一つの特殊解

$$A\big(\kappa t + \frac{r^2}{4}\big)$$

を得る．実際これが一つの解であることは (5.12) に代入して確かめることができる．したがって一般解は

$$T(r,t) = A\big(\kappa t + \frac{r^2}{4}\big) + \sum_{\alpha} A_\alpha\, e^{-\kappa\alpha^2 t}\, J_0(\alpha r)$$

となる．境界条件 (5.28) に代入すると

$$\frac{Ab}{2} + \sum_{\alpha} A_\alpha\, e^{-\kappa\alpha^2 t}\, \alpha\, J_0{}'(\alpha b) = \frac{F_0}{K}$$

となり，これが t に無関係に成り立つためには

$$J_0{}'(\alpha b) = 0 \qquad A = \frac{2F_0}{bK} \tag{5.29}$$

でなければならない．$J_0{}'(\alpha b) = 0$ から許される α の値 $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ を得る．故に境界条件 (5.28) を満たす解は, 定数 B を加えて

$$T(r,t) = \frac{2F_0}{bK}\,\big(\kappa t + \frac{r^2}{4}\big) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, e^{-\kappa\alpha_n^2 t}\, J_0(\alpha_n r) + B, \quad J_0{}'(\alpha b) = 0 \tag{5.30}$$

となる．ここで $A_0, A_1, \ldots$ と B は任意定数である．

任意定数 B の決定

これらの定数は初期条件から求めることができる．簡単のため初期温度を 0 とすると (5.30) より

$$-B - \frac{F_0}{2bK}\, r^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, J_0(\alpha_n r) \tag{5.31}$$

となる．B を求めるために r を掛けて 0 から b まで積分すると

$$\text{左辺} = \int_0^b \Big(-Br - \frac{F_0}{2bK}\, r^3\Big)\, dr = -\,\frac{Bb^2}{2} - \,\frac{F_0}{2bK}\,\frac{b^4}{4}$$

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^b r\ J_0(\alpha_n r)\ dr = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{1}{\alpha_n}\ \Big[r\ J_1(\alpha_n r)\Big]_0^b \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{b}{\alpha_n}\ J_1(\alpha_n b) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{b}{\alpha_n}\ \Big\{-J_0{}'(\alpha_n b)\Big\} = 0
\end{aligned}
$$

であるから

$$
B = -\ \frac{F_0 b}{4K}
$$

を得る．

任意定数 A_k の決定

次に $J_0(\alpha_0 r), J_0(\alpha_1 r), \ldots$ は互いに直交し，ノルムは (5.29) の条件から (1.35) で $h = 0$ とおいて得られるので

$$
\int_0^b r\ J_0{}^2(\alpha_n r)\ dr = \frac{b^2}{2}\ J_0{}^2(\alpha_n b)
$$

となる．(5.31) の両辺に $r\ J_0(\alpha_n r)$ を掛け 0 から b まで積分すると

$$
\begin{aligned}
\int_0^b \sum_{k=0}^{\infty} A_k\ r\ J_0(\alpha_k r) J_0(\alpha_n r)\ dr &= -\int_0^b \Big(B + \frac{F_0 r^2}{2bK}\Big)\ r\ J_0(\alpha_n r)\ dr \\
A_n &= -\ \frac{2}{b^2 J_0{}^2(\alpha_n b)} \int_0^b \Big(B + \frac{F_0 r^2}{2bK}\Big)\ r\ J_0(\alpha_n r)\ dr
\end{aligned}
$$

となる．次にベッセル関数の漸化式 (1.19) から

$$
\frac{d}{dz}\Big[z^\nu J_\nu(az)\Big] = z^{\nu-1}\Big[\nu\ J_\nu(az) + za\ J_\nu{}'(az)\Big] = az^\nu J_{\nu-1}(az) \tag{5.32}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\int_0^b r^3\ J_0(\alpha_n r)\ dr &= \Big[\frac{r^2}{\alpha_n}\ r\ J_1(\alpha_n r)\Big]_0^b - \int_0^b \frac{2}{\alpha_n}\ r^2\ J_1(\alpha_n r)\ dr \\
&= -\ \frac{2}{\alpha_n} \int_0^b\ r^2\ J_1(\alpha_n r)\ dr \\
&= -\ \frac{2}{\alpha_n}\Big[\frac{1}{\alpha_n}\ r^2\ J_2(\alpha_n r)\Big]_0^b = -\ \frac{2b^2}{\alpha_n{}^2}\ J_2(\alpha_n b) = \frac{2b^2}{\alpha_n{}^2}\ J_0(\alpha_n b)
\end{aligned}
$$

となる．よって

$$
\begin{aligned}
A_n &= -\ \frac{2}{b^2 J_0{}^2(\alpha_n b)} \Big\{\int_0^b B\ r\ J_0(\alpha_n r)\ dr + \int_0^b \frac{F_0}{2bK}\ r^3\ J_0(\alpha_n r)\ dr\Big\} \\
&= -\ \frac{2F_0}{bk}\ \frac{1}{\alpha_n{}^2 J_0(\alpha_n b)}
\end{aligned}
$$

を得る．以上のことから

$$
T(r,t) = \frac{2F_0}{bK}\big(\kappa t + \frac{r^2}{4}\big) - \frac{bF_0}{4K} - \frac{2F_0}{bK} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\kappa\alpha_n^2 t}\ \frac{J_0(\alpha_n r)}{\alpha_n{}^2 J_0(\alpha_n b)} \tag{5.33}
$$

という解を得る．

5.9 円柱表面の温度が z の関数のとき

円柱表面の温度は θ には関係しないが，z の与えられた関数 $F(z)$ である場合の定常解を求める．温度 T は (r,z) の関数であるが，z についてフーリエ積分で表し

$$T(r,z)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(r,w)\,e^{iwz}\,dw \tag{5.34}$$

とする．これをラプラスの方程式に代入し微分と積分の順序を交換すると

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwz}\Big(\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial r}-w^2G\Big)\,dw=0$$

となる．すべての z の値に対してこの関係が成り立つためには

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial G}{\partial r}-w^2G=0$$

でなくてはならない．これは変形ベッセル関数の微分方程式 (1.40) で $\nu=0, z=rw$ としたものだから，一般解は

$$I_0(rw),\qquad K_0(rw)$$

の１次結合であるが，$K_0(rw)$ は (1.44) より $z=0$ で特異点をもつから不適である．よって

$$G(r,w)=g(w)\,I_0(rw)\qquad \text{但し } g(w) \text{ は境界条件から定まる．}$$

を得る．境界条件は (5.34) で $r=b$ とおくと

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(w)I_0(bw)\,e^{iwz}\,dw=F(z)$$

となる．$F(z)$ をフーリエ積分として

$$F(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwz}f(w)\,dw$$

と表せば，明らかに $g(w)\,I_0(bw)=f(w)$ となる．したがって定常温度分布は

$$T(r,z)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwz}\,\frac{I_0(rw)}{I_0(bw)}\,f(w)\,dw$$

で与えられる．$f(w)$ は $F(z)$ のフーリエ逆変換により

$$f(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw\zeta}\,F(\zeta)\,d\zeta$$

であるから

$$T(r,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\zeta)\,d\zeta\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iw(z-\zeta)}\,\frac{I_0(rw)}{I_0(bw)}\,dw \tag{5.35}$$

となる．

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iw(z-\zeta)}\frac{I_0(rw)}{I_0(bw)}\,dw$ **の計算**

ここで $z>\zeta$ と仮定し

$$H(w)\equiv e^{iw(z-\zeta)}\ \frac{I_0(rw)}{I_0(bw)}=e^{iw(z-\zeta)}\ \frac{J_0(irw)}{J_0(ibw)}$$

とおいて関数 $H(w)$ を $w=0$ を中心に半径 R の円の上側の半円を一周する積分路にそって積分する．ベッセル関数 $J_0(z)$ は z のすべての値に対して正則であるから，関数 $H(w)$ は分母が 0 となる点を除いて正則である．分母が 0 となる w は，超越方程式

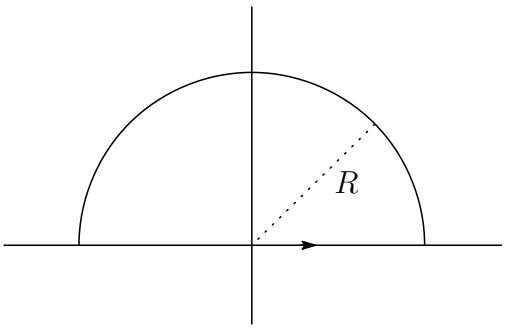

図 5.2:

$$J_0(\alpha b)=0\qquad \alpha>0$$

の根を $\alpha_0,\alpha_1,\ldots$ としたとき，$w=\pm i\alpha_0,\pm i\alpha_1,\ldots$ においてである．そのうち積分路内にあるものは $i\alpha_0,i\alpha_1,\ldots$ であるから，留数の定理から

$$\int_C H(w)\,dw=2\pi i\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Res}[H,i\alpha_k]$$

となる．C を直線部分 $(-R<w<R)$ と円弧 $w=Re^{i\theta}(0\le\theta\le\pi)$ に分けると

$$\int_C H(w)\,dw=\int_{-R}^{R}H(w)\,dw+\int_{\text{円弧}}H(w)\,dw$$

となる．ここで $R\to\infty$ のとき右辺の第二項は 0 に収束する．なぜならベッセルの漸近展開 (1.66) から，$|\arg(z)|<\pi$ において

$$J_n(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\cos\bigl(z-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\bigr)\ [1+O(z^{-1})]+\frac{1}{2z}\ \sin\bigl(z-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\bigr)\ [1+O(z^{-1})]\right\}$$

となるから，$|z|$ が大きいときは近似的に

$$J_n(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\ \cos\bigl(z-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\bigr)$$

とみると，$H(w)$ の漸近形は

$$H(w) \approx e^{iw(z-\zeta)} \left(\frac{b}{r}\right)^{1/2} \left\{\frac{\cos(iwr-\pi/4)}{\cos(iwb-\pi/4)}\right\} \qquad |\arg(iw)| < \pi$$

となる．円弧 $w = Re^{i\theta}(0 \le \theta \le \pi)$ 上では

$$\left|H(Re^{i\theta})\right| \approx \left(\frac{b}{r}\right)^{1/2} e^{R(z-\zeta)(-\sin\theta)}\ e^{(r-b)R|\cos\theta|}$$

となる．ここで

$$\left|\int_{\text{円弧}} H(w)dw\right| = \left|\int_0^{\pi} Ri\ e^{i\theta}\ H(Re^{i\theta})\ d\theta\right| \le \pi \cdot \sup_{0\le\theta\le\pi}\left|R\ H(Re^{i\theta})\right|$$

であるから $R \to \infty$ のとき円弧に沿った $H(w)$ の積分は 0 に収束する．以上のことから，結局

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(w)\ dw = 2\pi i \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Res}[H, i\alpha_k]$$

となる．$H(w)$ の特異点 $w = i\alpha_k$ はすべて一位の極であるから

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[H, i\alpha_k] &= \lim_{w\to i\alpha_k} \frac{(w-i\alpha_k)\ e^{iw(z-\zeta)}\ J_0(iwr)}{J_0(iwb)} \\
&= \lim_{w\to i\alpha_k} \frac{e^{iw(z-\zeta)}\ J_0(iwr)}{ib\ J_0{}'(iwb)} \\
&= \frac{e^{-\alpha_k(z-\zeta)}\ J_0(-\alpha_k r)}{ib\ J_0{}'(-\alpha_k b)} = \frac{e^{-\alpha_k(z-\zeta)}\ J_0(\alpha_k r)}{-ib\ J_1(-\alpha_k b)} = \frac{e^{-\alpha_k(z-\zeta)}\ J_0(\alpha_k r)}{ib\ J_1(\alpha_k b)}
\end{aligned}$$

となる．したがって

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(w)\ dw = \frac{2\pi}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_k(z-\zeta)}\ J_0(\alpha_k r)}{J_1(\alpha_k b)}$$

を得る．$z < \zeta$ のときは，半径 R の円の下半分と w の実数軸で作られる積分路を考え $R \to \infty$ とすれば積分への寄与は 0 となる．この場合も含め指数関数部を $e^{-\alpha_k|z-\zeta|}$ で置き換えると

$$T(r,z) = \frac{1}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_k r)}{J_1(\alpha_k b)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha_k|z-\zeta|}\ F(\zeta)\ d\zeta \tag{5.36}$$

となる．

1. $F(z) = 1$ **のとき**
   このとき $T(r,z) = 1$ となり，$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha_k|z-\zeta|}\ d\zeta = \frac{2}{\alpha_k}$ であるから (5.36) に代入して

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\ J_0(\alpha_k r)}{J_1(\alpha_k b)\ \alpha_k b} \tag{5.37}$$

   を得る．

2. $F(z) = \sin qz \quad (q > 0)$ **のとき**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin q\zeta \; e^{-\alpha_k|z-\zeta|} \, d\zeta = \sin qz \cdot \frac{2\alpha_k}{{\alpha_k}^2 + q^2}$$

となるから (5.36) に代入して

$$T(r,z) = \frac{2}{b} \; \sin qz \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_k r)}{J_1(\alpha_k b)} \; \frac{\alpha_k}{{\alpha_k}^2 + q^2}$$

を得る．

3. $F(z) = T_0 \; (z > 0), \quad F(z) = 0 \; (z < 0)$ **のとき**
このときは

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\zeta) \; e^{-\alpha_k|z-\zeta|} \, d\zeta = \begin{cases} T_0\Big(\dfrac{2}{\alpha_k} - \dfrac{e^{-\alpha_k|z|}}{\alpha_k}\Big) & (z > 0) \\ \\ T_0 \dfrac{e^{-\alpha_k|z|}}{\alpha_k} & (z < 0) \end{cases}$$

となり定常温度分布は $z > 0$ のとき

$$\begin{aligned} T(r,z) &= \frac{1}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_k r)}{J_1(\alpha_k b)} \Big\{ T_0 \Big(\frac{2}{\alpha_k} - \frac{e^{-\alpha_k|z|}}{\alpha_k} \Big) \Big\} \\ &= T_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_k r)}{J_1(\alpha_k b) \; \alpha_k b} + T_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_k r)}{J_1(\alpha_k b) \; \alpha_k b} \; (1 - e^{-\alpha_k|z|}) \\ &= \frac{T_0}{2} + T_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_k r)}{J_1(\alpha_k b) \; \alpha_k b} \; (1 - e^{-\alpha_k|z|}) \end{aligned}$$

となり，$z < 0$ についても同様に計算すると結局

$$T(r,z) = \frac{T_0}{2} \pm T_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_k r)}{J_1(\alpha_k b) \; \alpha_k b} \; (1 - e^{-\alpha_k|z|}) \qquad z \gtrless 0$$

という結果を得る．

5.10 無限媒質中に熱源があるとき

無限媒質中に円盤熱源あるときの定常分布を考える．熱源 Q があるとき，(5.5) から定常分布の微分方程式は

$$K\nabla^2 T + Q = 0 \tag{5.38}$$

である．また，熱源 Q が曲面 S 上にのみあるときは，その曲面の微小な部分を囲む体積にガウスの定理を用いポテンシャル論の (4.32) の代わりに

$$\frac{\partial T_1}{\partial N} - \frac{\partial T_2}{\partial N} = -\frac{\sigma}{K} \qquad \sigma : \text{単位面積あたりの熱源の強さ} \tag{5.39}$$

を得る．無限な広がりをもつ一様な媒質中に有限な熱源があるとき，その定常分布は (5.38) で与えらる．温度は無限遠方では有限な値をとるから温度分布 T はポテンシャルと同様に考えられる．

無限媒質中に半径 a の円板状熱源がある場合

無限媒質中に半径 a の円板状熱源が一定である場合を考える．z 軸は円板の中心を通り，円板は平面 $z=0$ 内にあるものとし，円柱座標 (r,θ,z) を用いて解を求める．熱源のないところでは温度 T はラプラスの方程式を満足し，いま T は θ に依存しないから

$$T = R(r)\ Z(z)$$

と変数分離すると，

$$\begin{aligned} \frac{d^2Z}{dz^2} - \lambda^2 Z &= 0 \\ \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \lambda^2 R &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．$R(r)$ の微分方程式は，ベッセルの微分方程式において $\nu=0$ としたもので，独立な解は

$$J_0(\lambda r) \qquad Y_0(\lambda r)$$

である．しかし，$r=0$ で解は発散してはならないから

$$J_0(\lambda r)$$

のみが許される．また

$$r \to \infty \quad \text{のとき} \quad J_0(\lambda r) < \infty$$

という条件から λ は実数でなければならず，便宜上 $\lambda > 0$ としておく．$Z(z)$ についても

$$|z| \to \infty \quad \text{のとき} \quad Z(z) < \infty$$

であるから解 $e^{-\lambda|z|}$ を得る．したがって，一般解は

$$e^{-\lambda|z|}\ J_0(\lambda r)$$

を λ について重ね合わせて

$$T(r,z) = \int_0^\infty e^{-\lambda|z|}\ J_0(\lambda r) f(\lambda)\ d\lambda \tag{5.40}$$

と表すことができる．$f(\lambda)$ は $z=0$ での条件をもちいて求めることができる．

1. **条件 (5.39) を用いて $f(\lambda)$ を求める場合**

   $f(\lambda)$ は $z=0$ での条件 (5.39) を用いて定められる．

$$\left.\frac{\partial T_1}{\partial z}\right|_{z\to+0} - \left.\frac{\partial T_2}{\partial z}\right|_{z\to-0} = -\,2\int_0^\infty \lambda f(\lambda) J_0(\lambda r)\ d\lambda = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{K} & r<a \\ 0 & r>a \end{cases} \tag{5.41}$$

であるから，両辺に $J_0(\mu r)\ r$ をかけて r について積分すると

$$\int_0^\infty \lambda f(\lambda)\ d\lambda \int_0^\infty J_0(\lambda r) J_0(\mu r)\ r\ dr = \frac{\sigma}{2K} \int_0^a J_0(\mu r)\ r\ dr$$

となる．左辺は (1.15) のハンケルの定理より $f(\mu)$ であり，右辺については

$$\frac{d}{dz}\Big[z^\nu J_\nu(az)\Big] = z^{\nu-1}\Big[\nu J_\nu(az) + az J_\nu{}'(az)\Big] = az^\nu J_{\nu-1}(az)$$

と，付録 (1.19) のベッセルの漸化式より

$$\int_0^a J_0(\mu r)\ r\ dr = \frac{1}{\mu}\Big[r\ J_1(\mu r)\Big]_0^a = \frac{a}{\mu}\ J_1(\mu a)$$

が成り立つので

$$f(\mu) = \frac{\sigma a}{2K}\ \frac{J_1(\mu a)}{\mu} \tag{5.42}$$

を得る．ゆえに温度分布は

$$T(r,z) = \frac{\sigma a}{2K} \int_0^\infty e^{-\lambda|z|}\ J_0(\lambda r) J_1(\lambda a)\ \frac{d\lambda}{\lambda}$$

となる．

2. **円板 $r < a$ で $T(r,0) = T_0$ に保たれ，$r > a$ で $T(r,0) = 0$ の場合**
(5.40) より

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r) f(\lambda)\ d\lambda = \begin{cases} T_0 & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

であるから，両辺に $J_0(\mu r) r$ を掛け積分すると

$$f(\mu) = T_0\ a\ \frac{J_1(\mu a)}{\mu}$$

を得る．ゆえに温度分布は

$$T(r,z) = aT_0 \int_0^\infty e^{-\lambda|z|}\ J_0(\lambda r) J_1(\lambda a)\ \frac{d\lambda}{\lambda}$$

となる．

5.11 球内部の熱伝導

半径 b の一様な球の内部での熱伝導を考える．熱源がない場合の熱伝導方程式は，球の中心を原点にとり，球座標を (r,θ,φ) とすると

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\Big\{\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\ \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \cot\theta\ \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\ \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}\Big)\Big\} \tag{5.44}$$

となる．すでに球座標によるラプラス方程式の一般解で示した様に，特殊解を

$$T(r,\theta,\varphi,t) = R(r)\ P_n^m(\cos\theta)\Big\{A_{n,m}\ \cos m\varphi + B_{n,m}\ \sin m\varphi\Big\}\ e^{-\kappa\lambda^2 t}$$

とすると，関数 $R(r)$ は方程式

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\ \frac{dR}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2}\ R = -\lambda^2 R \tag{5.45}$$

を満足する．ここで変数変換

$$\lambda r = x, \qquad R(r) = v(x)\ x^{-1/2}$$

を行うと微分方程式

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{x}\ \frac{dv}{dx} + \Big\{1 - \frac{(n+1/2)^2}{x^2}\Big\}\ v = 0$$

を得る．これは $n+1/2$ 次のベッセルの微分方程式であり，この方程式の独立な解は

$$J_{n+1/2}(x), \qquad J_{-n-1/2}(x)$$

であるが，$J_{-n-1/2}(x)$ は $x=0$ で特異点をもち球の中心で無限大の温度を与えるから除く．したがって特殊解は

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda r}}\ J_{n+1/2}(\lambda r)\ P_n^m(\cos\theta)\Big\{A_{n,m}\ \cos m\varphi + B_{n,m}\ \sin m\varphi\Big\}\ e^{-\kappa\lambda^2 t}$$

と表される．

球表面で温度が 0 の場合の解

球表面 $r=b$ で温度が 0 に保たれているときは，境界条件として超越方程式

$$J_{n+1/2}(\lambda b) = 0$$

を用いて，この無限個の正の実根を

$$\lambda_{n+1/2,0}\ ,\ \lambda_{n+1/2,1}\ ,\ \lambda_{n+1/2,2}\ ,\ \cdots$$

とすると，温度分布は重ね合わせると

$$\begin{aligned} T(r,\theta,\varphi,t) \quad &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{n+1/2}(\lambda_{n+1/2,k}\ r)}{\sqrt{\lambda_{n+1/2,k}\ r}} \\ &\quad \times P_n^m(\cos\theta)\Big\{A_{n,k,m}\ \cos m\varphi + B_{n,k,m}\ \sin m\varphi\Big\}\ e^{-\kappa\lambda_{n+1/2,k}^2\ t} \end{aligned} \tag{5.46}$$

で与えられる．

次に任意定数 $A_{n,k,m}$ ，$B_{n,k,m}$ は，初期の温度分布 $f(r,\theta,\varphi)\quad(t=0)$ を用いて表すことができる．まず $t=0$ のとき

$$f(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{n+1/2}(\lambda_{n+1/2,k}\ r)}{\sqrt{\lambda_{n+1/2,k}\ r}}\ P_n^m(\cos\theta)\Big\{A_{n,k,m}\ \cos m\varphi + B_{n,k,m}\ \sin m\varphi\Big\}$$

が成り立つ．

両辺に $\cos m\varphi$ をかけて 0 から 2π まで φ で積分すると

$$\int_0^{2\pi} f(r,\theta,\varphi)\ \cos m\varphi\ d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{n+1/2}(\lambda_{n+1/2,k}\ r)}{\sqrt{\lambda_{n+1/2,k}\ r}}\ P_n^m(\cos\theta)\ A_{n,k,m}\ \pi$$

を得る．但し，$m=0$ のとき π は 2π となる．

次に $P_n^m(\cos\theta)\sin\theta$ を両辺にかけ 0 から π まで θ で積分すると，ルジャンドル陪関数の直交性から

$$\int_0^{\pi} P_n^m(\cos\theta)\ \sin\theta\ \left(\int_0^{2\pi} f(r,\theta,\varphi)\ \cos m\varphi\ d\varphi\right) d\theta$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{n+1/2}(\lambda_{n+1/2,k}\ r)}{\sqrt{\lambda_{n+1/2,k}\ r}}\ \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\ A_{n,k,m}\ \pi$$

となる．

更に両辺に $r^{3/2}J_{n+1/2}(\lambda_{n+1/2,k}\ r)$ をかけて 0 から b まで r で積分すると，ベッセル関数の直交性から

$$\int_0^{b} r^{3/2}J_{n+1/2}(\lambda_{n+1/2,k}\ r)\left(\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} P_n^m(\cos\theta)\ \sin\theta\ f(r,\theta,\varphi)\ \cos m\varphi\ d\varphi\right) dr$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+1/2,k}}}\ \frac{b^2}{2}\Big[{J_{n+1/2}}'(\lambda_{n+1/2,k}\ b)\Big]^2\ \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\ A_{n,k,m}\ \pi$$

となる．したがって

$$A_{n,k,m} = \frac{(2n+1)(n-m)!\ {\lambda_{n+1/2,k}}^{1/2}}{\pi(n+m)!\ b^2\Big[{J_{n+1/2}}'(\lambda_{n+1/2,k}\ b)\Big]^2}$$
$$\times \int_0^{b}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^{3/2}J_{n+1/2}(\lambda_{n+1/2,k}\ r)P_n^m(\cos\theta)\ \sin\theta\ f(r,\theta,\varphi)\ \cos m\varphi\ d\varphi\ d\theta\ dr \tag{5.47}$$

$$B_{n,k,m} = \frac{(2n+1)(n-m)!\ {\lambda_{n+1/2,k}}^{1/2}}{\pi(n+m)!\ b^2\Big[{J_{n+1/2}}'(\lambda_{n+1/2,k}\ b)\Big]^2}$$
$$\times \int_0^{b}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^{3/2}J_{n+1/2}(\lambda_{n+1/2,k}\ r)P_n^m(\cos\theta)\ \sin\theta\ f(r,\theta,\varphi)\ \sin m\varphi\ d\varphi\ d\theta\ dr \tag{5.48}$$

を得る．但し，$m=0$ のとき係数 $A_{n,k,m}$ の分母は 2 倍するものとする．

付 録A

A.1　対数関数とベキ関数

指数関数の逆関数を **対数関数** といい，$\log z$ で表す．その実部および虚部を u および v で表せば，

$$w \;=\; \log z \;=\; u + i\,v$$

である．なお，

$$z \;=\; r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta), \qquad (r \;>\; 0, \quad -\pi \;<\; \theta \;\leq\; \pi)$$

と書けば

$$r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta) \;=\; e^{w} \;=\; e^{u}(\cos v + i\,\sin v)$$

となる．ゆえに

$$u \;=\; \log r, \qquad v \;=\; \theta + 2n\pi, \quad n \;:\; \text{整数}$$

となる．よって

$$\log z \;=\; \log r + i\,(\theta + 2n\pi), \quad (r \;>\; 0,\; -\pi \;<\; \theta \;\leq\; \pi,\; n \;:\; \text{整数}) \tag{1.1}$$

となる．0でない z の一つの値に対して $\log z$ の実部は一定であるが，その虚部には無限に多くの値が対応する．結局 z の一つの値に対して $\log z$ には無限に多くの値がある．このように z の一つの値に対して二つまたはそれより多くの値をもつ関数を一般に z の **多価関数** という．$n = 0$ の場合の値を $\log z$ の **主値** という．

次に z および a が複素数であるときに，**ベキ関数** を

$$z^{a} \;=\; e^{a\log z}, \qquad (z \;\neq\; 0) \tag{1.2}$$

で定義する．$\log z$ が多価関数であるから，z^{a} も一般に多価関数である．特に a が実数の場合を考えると，$\log z \;=\; \log|z| + i\,(\theta + 2n\pi)$ であるから

$$z^{a} \;=\; e^{a\log|z|}\;e^{ia(\theta+2n\pi)} \;=\; |z|^{a}\;e^{ia(\theta+2n\pi)}$$

となる．ゆえに

$$|z^{a}| \;=\; |z|^{a}, \quad \arg z^{a} \;=\; a(\theta + 2n\pi)$$

となる．特に $n = 0$ の場合には

$$z^{a} \;=\; |z|^{a}\;e^{ia\theta}$$

となり，右辺を z^a の主値という．

一般に負の実軸に沿って切った z 平面を無限枚用意し，これを

$$Z_0,\ Z_1,\ Z_2,\ \ldots; \qquad Z_{-1},\ Z_{-2},\ \ldots$$

とする．ここに z が Z_0 の中にあればその偏角は $-\pi < \theta \leq \pi$ で，一般に $Z_n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ の中にあれば，偏角は $-\pi + 2n\pi < \theta \leq \pi + 2n\pi$ とする．Z_n の負の実軸に沿って切った切り口には上側と下側の二つの岸がある．上側の岸を ${L_n}^+$，下側の岸を ${L_n}^-$ で表す．そして，Z_0 の ${L_0}^+$ と Z_1 の ${L_1}^-$ とを連結し，Z_1 の ${L_1}^+$ と Z_2 の ${L_2}^-$ とを連結し，以下同様に Z_n の ${L_n}^+$ と Z_{n+1} の ${L_{n+1}}^- \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ とを連結すれば無限葉からなる一つの表面 F ができる．この F を $\log z$ の **リーマン (Riemann) 面** という．各 Z_n を F の **葉** という．$z = 0$ では無限個の葉が連結している．点 z がリーマン面 F 上にあれば，どれかの葉 Z_n 上にある．z が Z_n 上を動いて原点のまわりを正の方向に回転して ${L_n}^+$ に達すれば，これを超えて Z_{n+1} の中に入って行く．また，z が Z_n 上を動いて原点のまわりを負の方向に回転して ${L_n}^-$ に達すれば，これを超えて Z_{n-1} の中に入って行く．Z_n の中で $\log z$ を

$$\log z \ = \ \log r + i\,(\theta + 2n\pi), \quad r > 0, \quad -\pi \ < \ \theta \ \leq \ \pi$$

で定義すれば，$\log z$ はリーマン面上で一価となる．このように多価関数に対して，z の動く範囲を制限して一価関数としたものを多価関数の **分枝** という．
ベキ関数についても $\log z$ と同様に z 平面では無限多価であるが，$\log z$ のリーマン面 F の上では一価となる．以後，特に断らない限り適当な分枝を選んでいるものとする．

A.2 ガンマ関数とベータ関数の関係

$x > 0$ に対して

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt \tag{1.3}$$

によって与えられる定積分を x の関数をガンマ関数という．このとき，

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x\, e^{-t}\, dt = [-e^{-t}\, t^x]_0^\infty + x \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt = x\,\Gamma(x)$$

である．故に

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \qquad x > 0 \tag{1.4}$$

となる．$x = 1$ のとき

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = \Big[-e^{-t}\Big]_0^\infty = 1$$

となる．n を正の整数とすれば

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)(n-2)...2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n! \tag{1.5}$$

となる．

次に $p > 0, q > 0$ に対して

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}\,(1-t)^{q-1}\,dt \tag{1.6}$$

となる定積分によって与えられる p, q の関数をベータ関数という．
積分変数 t を $t = 1-\tau$ と変換すると

$$B(p,q) = -\int_1^0 (1-\tau)^{p-1}\,\tau^{q-1}\,d\tau = B(q,p) \tag{1.7}$$

となる．また，　$\tau = (1-t)/t$ と変換すると

$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{\tau^{q-1}}{(1+\tau)^{p+q}}\,d\tau \tag{1.8}$$

さらに $t = \cos^2\theta \quad (0 \le \theta \le \pi/2)$　と変換すると

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta\ \sin^{2q-1}\theta\,d\tau \tag{1.9}$$

となる．

さてガンマ関数とベータ関数の関係について考えみる．

命題 A.1 等式

$$\Gamma(x)\,\Gamma(y) = \Gamma(x+y)\,B(x,y) \qquad (x\ >\ 0,\quad y\ >\ 0) \tag{1.10}$$

が成り立つ．

証明： $x\ >\ 0,\ y\ >\ 0$ のとき

$$\Gamma(x)\,\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-u}\,u^{x-1}\,du \int_0^\infty e^{-v}\,v^{y-1}\,dv$$

となる．u のかわりに u^2,　v のかわりに v^2 とおけば

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\,\Gamma(y) &= 4\lim_{R\to\infty}\int_0^R dv \int_0^R e^{-(u^2+v^2)}\,u^{2x-1}\,v^{2y-1}\,du \\ &= 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}\,u^{2x-1}\,v^{2y-1}\,du\,dv \end{aligned} \tag{1.11}$$

となる．この積分は $u,\ v$ 平面上の第一象限全体ににわたる二重積分である．

$$u = r\cos\theta, \qquad v = r\sin\theta \qquad\qquad (0 \le \theta \le 2\pi)$$

とおくと

$$\Gamma(x)\Gamma(y)\ =\ = 2\int_0^\infty e^{-r^2}\,r^{2x+2y-1}\,dr \cdot 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta\ \sin^{2y-1}\theta\,d\theta$$

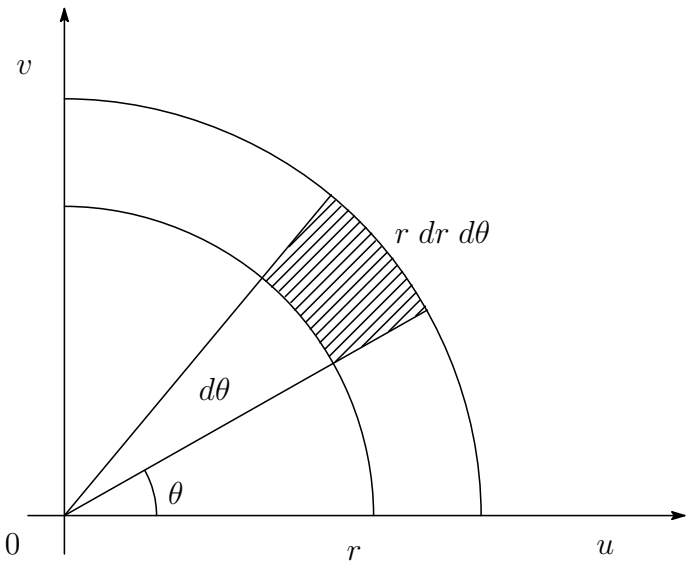

図 1.1:

$$= \Gamma(x+y) \cdot B(x,y)$$

故に

$$\Gamma(x)\,\Gamma(y) = \Gamma(x+y)\,B(x,y) \qquad (x\ >\ 0, \quad y\ >\ 0)$$

（証明終わり）

$x = y = 1/2$　のとき　$\{\Gamma(1/2)\}^2 = \pi$　となる．
$x > 0$ に対してガンマ関数は正の値をとるから　$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$　を得る．
また，n が正の整数のとき

$$\Gamma(n+1/2) = (n-1/2)\,\Gamma(n-1/2) = (n-1/2)(n-3/2)\cdots 1/2 \cdot \sqrt{\pi} \qquad n > 0：整数 \tag{1.12}$$

となる．(1.10) で y のかわりに $1-x$ とおけば

$$\Gamma(1-x)\,\Gamma(x) = B(1-x,x) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin \pi x} \qquad (0 < x < 1) \tag{1.13}$$

を得る.（犬井鉄郎著：特殊関数 (岩波書店) の第１章３節を参照.）

命題 A.2 (ウォリスの公式) 等式

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n \theta\, d\theta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{(n-1)(n-3)\ldots 3 \cdot 1}{n(n-2)(n-4)\ldots 2} & n：偶数 \\[2ex] \dfrac{(n-1)(n-3)\ldots 4 \cdot 2}{n(n-2)(n-4)\ldots 3 \cdot 1} & n：奇数 \end{cases} \tag{1.14}$$

が成り立つ．

証明：

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta\ \sin^{2q-1}\theta\ d\theta = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

より，　$p = 1/2,\ 2q-1 = r$　とおくと

$$\int_0^{\pi/2} \sin^r\theta\ d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma(r/2+1/2)}{\Gamma(r/2+1)}$$

となる．特に，　r が正整数 n に等しいときウォリスの公式

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n\theta\ d\theta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{(n-1)(n-3)\ldots 3\cdot 1}{n(n-2)(n-4)\ldots 2} & n：偶数 \\[2ex] \dfrac{(n-1)(n-3)\ldots 4\cdot 2}{n(n-2)(n-4)\ldots 3\cdot 1} & n：奇数 \end{cases}$$

を得る．　**（証明終わり）**

ウォリスの公式を用いて次の命題を導くことができる．

命題 A.3 等式

$$\lim_{m\to\infty}\frac{(2m)^2(2m-2)^2\ldots 4^2\cdot 2^2}{(2m+1)(2m-1)^2\ldots 3^2} = \frac{\pi}{2} \tag{1.16}$$

が成り立つ．

証明：　$0 < \theta < \pi/2$　のとき

$$\sin^{2m-1}\theta > \sin^{2m}\theta > \sin^{2m+1}\theta \qquad m：正整数$$

より

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta\ d\theta > \int_0^{\pi/2} \sin^{2m}\theta\ d\theta > \int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1}\theta\ d\theta$$

となる．それぞれの積分にウォリスの公式を用いると

$$\frac{(2m-2)(2m-4)\ldots 4\cdot 2}{(2m-1)(2m-3)\ldots 3} > \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 3\cdot 1}{2m(2m-2)\ldots 2} > \frac{2m(2m-2)\ldots 4\cdot 2}{(2m+1)(2m-1)\ldots 3}$$

となる．両辺に　$2m\cdot(2m-2)\ldots 2/(2m-1)(2m-3)\ldots 3$　を掛けると

$$\left(1+\frac{1}{2m}\right)\frac{(2m)^2(2m-2)^2\ldots 4^2\cdot 2^2}{(2m+1)(2m-1)^2\ldots 3^2} > \frac{\pi}{2} > \frac{(2m)^2(2m-2)^2\ldots 4^2\cdot 2^2}{(2m+1)(2m-1)^2\ldots 3^2}$$

となる．$m\to 0$　のとき　$(1+1/m)\to 1$　より

$$\lim_{m\to\infty}\frac{(2m)^2(2m-2)^2\ldots 4^2\cdot 2^2}{(2m+1)(2m-1)^2\ldots 3^2} = \frac{\pi}{2}$$

を得る．　**（証明終わり）**

A.3　ガンマ関数の無限乗積表現

まず定義域の拡張をする．複素数　$z = x + yi,\quad i^2 = -1,\quad (x, y : 実数)$　が与えられたとき x を実数部,　y を虚数部とよび

$$x = \mathrm{Re}(z) \quad y = \mathrm{Im}(z)$$

表す．z の絶対値は

$$|z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

によって, また偏角 θ は

$$\theta = \tan^{-1}(y/x) = \arg(z)$$

によって定義する．
さて複素数のガンマ関数を

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt \qquad \mathrm{Re}(z) > 0 \tag{1.17}$$

によって定義する．この積分は任意の領域　$0 < a < \mathrm{Re}(z) < b$　で一様収束する．なぜなら

$$\int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt = \int_0^1 e^{-t}\, t^{z-1}\, dt + \int_1^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$$

であり、　$z = x + yi$　とおくと

$$\left|\int_0^1 e^{-t}\, t^{z-1}\, dt\right| \le \int_0^1 e^{-t}\, t^{x-1}\, \left|t^{iy}\right|\, dt = \int_0^1 e^{-t}\, t^{x-1}\, dt < \int_0^1 e^{-t}\, t^{a-1}\, dt$$

となる．最後の積分は存在し，　$x = \mathrm{Re}(z)$　の値に依存しない．また,

$$\left|\int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt\right| \le \int_1^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt < \int_1^\infty e^{-t}\, t^{b-1}\, dt$$

となり、先と同様に最後の積分は存在し，　$x = \mathrm{Re}(z)$　の値に依存しない．したがって積分 (1.12) は　$a < \mathrm{Re}(z) < b$　で一様収束する．　a,　b　は　$0 < a < b$　であるような任意の数であるから、その積分は　$\mathrm{Re}(z) > 0$　で一様収束する．また被積分関数は　$\mathrm{Re}(z) > 0,\quad 0 < t < \infty$　で連続であるから積分 (1.12) は z の連続関数である．前節と同様にして複素変数のガンマ関数にたいし

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) \qquad \mathrm{Re}(z) > 0 \tag{1.18}$$

がなりたつ．$\mathrm{Re}(z) < 0$ である z に対してもこの漸化式を用いて, 例えば

$$\Gamma(-3/2) = \frac{\Gamma(-1/2)}{(-3/2)} = \frac{\Gamma(1/2)}{(-3/2)(-1/2)} = 4\sqrt{\pi}/3$$

として定義する．このとき z が 0 又は負の整数のとき分母に 0 が現れるのでガンマ関数は $z = 0, -1, -2, \ldots$ を除いた $z-$ 平面上のすべての点で定義されたことになる．

ガンマ関数は無限乗積として表現することができる．

命題 A.4 (オイラー (Euler) の公式) ガンマ関数は

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{z}{n^z} \prod_{m=1}^{n} (1 + \frac{z}{m}) \tag{1.19}$$

と表すことができる．

証明：関数

$$B_n(z) = \int_0^n (1 - t/n)^n \, t^{z-1} \, dt \qquad \mathrm{Re}(z) > 0, \quad n \text{ は正整数}$$

を考える．$t = nv$　とおくと

$$\begin{aligned} B_n(z) &= n^z \int_0^n (1-v)^n \, v^{z-1} \, dv \\ &= n^z \left(\left[\frac{v^z}{z} \, (1-v)^n \right]_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 v^z \, (1-v)^{n-1} \, dv \right) \\ &= n^z \left(\frac{n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \int_0^1 v^{z+n-1} \, dv \right) \\ &= \frac{n^z}{z} \prod_{m=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{m}\right)^{-1} \end{aligned}$$

次に, ガンマ関数と $B_n(z)$ の関係を調べる．

$$\Gamma(z) - B_n(z) = \int_0^n \left\{ e^{-t} - (1 - t/n)^n \right\} t^{z-1} \, dt + \int_n^\infty e^{-t} \, t^{z-1} \, dt$$

を考える．一般に

$$e^{-t} \geq 1 - t \qquad 0 \leq t \leq 1$$

であるから t のかわりに t/n とおいて n 乗すれば

$$e^{-t} \geq (1 - t/n)^n \qquad 0 \leq t \leq n$$

また，　$e^t \geq 1 + t$,　$t \geq 0$ であるから, 同様にして

$$e^t \geq (1 + t/n)^n \qquad t \geq 0$$

となる．これらの関係式より

$$0 \leq e^{-t} - (1 - t/n)^n = e^{-t} \left\{ 1 - e^t (1 - t/n)^n \right\} \leq e^{-t} \left\{ 1 - (1 - t^2/n^2)^n \right\} \qquad 0 \leq t \leq n$$

を得る．また，　$(1-t)^n \geq 1 - nt$ より

$$1 - (1 - t^2/n^2)^n \leq 1 - (1 - n \, \frac{t^2}{n^2}) = \frac{t^2}{n}$$

となるから

$$\Big|\Gamma(z) - B_n(z)\Big| \le \int_0^n \frac{t^2}{n}\, e^{-t}\, t^{x-1}\, dt + \int_n^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \qquad z = x + iy$$

を得る．ここで $n \to \infty$ のとき

$$\int_n^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt \to 0, \qquad \frac{1}{n}\int_0^n t^{x+1}\, e^{-t}\, dt < \frac{1}{n}\,\Gamma(x+2)$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty} B_n(z) = \Gamma(z) \qquad \mathrm{Re}(z) > 0$$

となる．故に

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{z}{n^z} \prod_{m=1}^{n} \big(1 + \frac{z}{m}\big)$$

となる．これをオイラー（Euler）の公式という． **（証明終わり）**

ここで

$$n^{-z} = e^{-z\log n}, \quad e^{z(1+1/2+1/3+\cdots+1/n)} \prod_{m=1}^{n} e^{-z/m} = 1$$

であるから,**オイラーの定数** γ を

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\Big\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\Big\} = 0.577215664\cdots$$

と定義すれば

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\, e^{\gamma z} \prod_{m=1}^{\infty} \big(1 + \frac{z}{m}\big)\, e^{-z/m} \tag{1.20}$$

となる．これを **ワイアストラース（Weierstrass）の公式** という．

命題 A.5 ガンマ関数は $\mathrm{Re}(z) > 0$ において正則である．

証明：(1.12) で定義したガンマ関数は $\mathrm{Re}(z) > 0$ で連続である．また, 一様収束な積分であるから C を $\mathrm{Re}(z) > 0$ にある任意な閉曲線とすると

$$\int_C \Gamma(z)\, dz = \int_0^\infty e^{-t}\, dt \int_C t^{z-1}\, dz$$

ここで， t^{z-1} は z の関数と見なしたとき, どの z の値に対しても微分可能であるから, コーシーの積分定理より任意の閉曲線 C に対して

$$\int_C t^{z-1}\, dz = 0 \quad \text{よって} \quad \int_C \Gamma(z)\, dz = 0$$

したがって, モレラ（Morera）の定理により $\Gamma(z)$ は $\mathrm{Re}(z) > 0$ で z の正則な関数である. **（証明終わり）**

ガンマ関数の微分係数はワイヤストラースの無限乗積を用いて求めることができる. (1.14) で両辺の対数をとって微分すると

$$-\log\Gamma(z) = \log z + \gamma z + \sum_{m=1}^{\infty}\{\log(1+\frac{z}{m}) - \frac{z}{m}\}$$

$$-\frac{1}{\Gamma(z)}\frac{d\Gamma(z)}{dz} = \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{m=1}^{\infty}(\frac{1}{m+z} - \frac{1}{m})$$

これを書き直して**プサイ関数** $\psi(z)$ を

$$\psi(z) \equiv \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{z} - \gamma + z\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(m+z)} \tag{1.21}$$

と定義する.

A.4 ガンマ関数の乗法公式

補題 A.1 次の等式が成り立つ.

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{\pi k}{n} = \frac{n}{2^{n-1}} \tag{1.22}$$

証明： n を正整数とすると, 代数方程式

$$\omega^n = 1$$

は n 個の根をもつ．それらの根を $\omega_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$ とすると

$$\omega^n - 1 = (\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)\cdots(\omega - \omega_n), \quad \omega_k = e^{2\pi ki/n}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

となる．等式の両辺を $(\omega - 1)$ で割ると

$$\frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = (\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)\cdots(\omega - \omega_{n-1})$$

また一方

$$\frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1}$$

であるから, $\omega = 1$ とすると

$$n = (1 - \omega_1)(1 - \omega_2)\cdots(1 - \omega_{n-1})$$

となる．ここで

$$1 - \omega_k = 1 - e^{2\pi ki/n}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - \cos(2\pi k/n) - i\ \sin(2\pi k/n) \\
&= 2\sin \pi k/n\ \big(\sin \pi k/n - i\ \cos \pi k/n\big) \\
&= e^{k\pi i/n}\ \big(-2i\ \sin \frac{k\pi}{n}\big)
\end{aligned}
$$

であるから

$$
n = \prod_{k=1}^{n-1} e^{k\pi i/n}\big(-2i\ \sin \frac{k\pi}{n}\big) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{n}
$$

故に

$$
\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}
$$

という結果を得る． **（証明終わり）**

この等式を用いてガンマ関数の乗法公式を導く．

命題 A.6 (ガウスの乗法公式) 次の等式が成り立つ．

$$
\Gamma(z)\,\Gamma(z+\frac{1}{n})\cdots\Gamma(z+\frac{n-1}{n}) = n^{1/2-nz}\ (2\pi)^{(n-1)/2}\ \Gamma(nz) \tag{1.23}
$$

証明： n を正の整数とするとき, 関数

$$
\Phi(z) = \frac{n^{nz}\ \Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{n})\cdots\Gamma(z+\frac{n-1}{n})}{n\,\Gamma(nz)}
$$

を考える．分母はオイラーの公式 (1.19) を用いて

$$
\text{分母} = n \lim_{m\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots m\cdot m^{nz}}{nz\ (1+nz)(2+nz)\cdots(m+nz)}
$$

となる．ここで， m の代わりに mn とすると

$$
\text{分母} = n \lim_{m\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots (nm)\cdot (nm)^{nz}}{nz\ (1+nz)(2+nz)\cdots(nm+nz)}
$$

となる．次に分子についてオイラーの公式を用いる．

$$
\begin{aligned}
\text{分子} &= n^{nz} \prod_{r=0}^{n-1} \Gamma(z+r/n) \\
&= n^{nz} \prod_{r=0}^{n-1} \lim_{m\to\infty} \frac{n^{m+1}\ (m!)\ m^{z+r/n}}{(nz+r)(nz+n+r)(nz+2n+r)\cdots(nz+nm+r)}
\end{aligned}
$$

$$= n^{nz} \lim_{m\to\infty} n^{(m+1)n}\ (m!)^n\ m^{nz+\frac{n-1}{2}}$$
$$\times \prod_{r=0}^{n-1} \frac{1}{(nz+r)(nz+n+r)(nz+2n+r)\cdots(nz+nm+r)}$$

となる．したがって

$$\Phi(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{(m!)^n\ n^{(m+1)n}\ m^{(n-1)/2}}{n\ (nm)!}$$

となる．この右辺は z とは無関係であるから $\Phi(z)$ は定数である．したがって，　$z = 1/n$ のときの値を求めると

$$\Phi(1/n) = \Gamma(1/n)\ \Gamma(2/n)\cdots\Gamma((n-1)/n)\ \Gamma(1)$$

となる．両辺を 2 乗して

$$\begin{aligned}\Phi^2(z) &= \prod_{r=1}^{n-1}\Big\{\Gamma(r/n)\Gamma(1-r/n)\Big\} \\ &= \frac{\pi^{n-1}}{\sin\dfrac{\pi}{n}\ \sin\dfrac{2\pi}{n}\cdots\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}} \\ &= \frac{(2\pi)^{n-1}}{n}\end{aligned}$$

$\Phi(z)$ は $z = 1/n$ のとき, 定義から正であるから

$$\Phi(z) = \Big\{(2\pi)^{n-1}/n\Big\}^{1/2}$$

である．よって

$$\Gamma(z)\ \Gamma(z+\frac{1}{n})\cdots\Gamma(z+\frac{n-1}{n}) = n^{1/2-nz}\ (2\pi)^{(n-1)/2}\ \Gamma(nz)$$

を得る．これを **ガウス (Gauss) の乗法公式** と呼ぶ.　　**（証明終わり）**

特に，　$n = 2$ のとき

$$\Gamma(z)\ \Gamma(z+1/2) = \sqrt{\pi}\ \Gamma(2z)\ 2^{1-2z} \tag{1.24}$$

となり, これを **ガンマ関数の倍法公式** と呼ぶ.

A.5　ガンマ関数のハンケル表示

命題 A.7 (ガンマ関数のハンケル表示) ガンマ関数は次のように表すことができる．

$$\Gamma(z) = \frac{-1}{2i\ \sin\pi z}\int_C e^{-t}\ (-t)^{z-1}\ dt \qquad (z \neq 0, -1, -2, \dots) \tag{1.25}$$

但し、C は図 1.2 に示された積分路とする．

証明：複素積分 $f(z)$ を

$$f(z) = \int_C e^{-t}\,(-t)^{z-1}\,dt$$

とする．但し、C は図 1.2 に示された積分路とする．

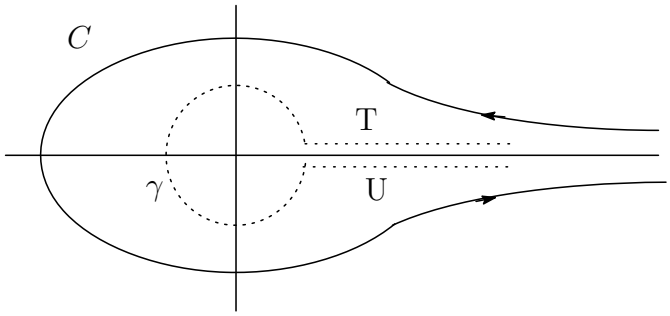

図 1.2:

$(-t)^{z-1}$ は t の多価関数であるが，　$t = re^{i\theta}$ として

$$(-t)^{z-1} = e^{(z-1)(\log r + i\theta)} \qquad (0 \le \theta \le 2\pi)$$

のように $(-t)^{z-1}$ の値を定めるものとする．そうすれば被積分関数は z の一価正則関数で, 積分は z の有界変域で一様収束であるから,$f(z)$ はすべての z に対して一価正則な関数である．いま積分路 C を変えて, 図 1.2 の点線に示す x 軸の正の部の上側に沿った直線　, 下側に沿った直線　, 原点を中心とする半径 r の円 γ とする．
$\mathrm{Re}(z) > 0$ と仮定し，　$t = re^{i\theta}$ とすると，　　に沿っては $\theta = 0$ より

$$\int \;= \int_{\infty}^{\delta} e^{-r}\,r^{z-1}\,e^{-\pi i(z-1)}\,dr$$

となり，　　に沿っては $\theta = 2\pi$ より

$$\int \;= \int_{\delta}^{\infty} e^{-r}\,r^{z-1}\,e^{\pi i(z-1)}\,dr$$

となる．よって

$$\int \;+ \int \;= -2i\,\sin\pi z \int_{\delta}^{\infty} e^{-r}\,r^{z-1}\,dr$$

となる．γ 上では $t = \delta e^{i\theta}$,　$(0 < \theta < 2\pi)$ とおくと

$$\int_{\gamma} = \int_0^{2\pi} e^{-\delta(\cos\theta + i\sin\theta)}\,(-1)^{z-1}\,\delta^z\,e^{i\theta z}\,i\,d\theta$$

となる．いま $\mathrm{Re}(z) > 0$ より，　$\delta \to 0$ のとき極限は 0 となる．よって

$$\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{z-1}\,dt = \frac{-1}{2i\,\sin\pi z}\int_C e^{-t}\,(-t)^{z-1}\,dt \qquad \mathrm{Re}(z) > 0 \tag{1.26}$$

を得る．ガンマ関数は，　$\mathrm{Re}(z) > 0$ で定義されたが, 上記の右辺は負の整数を除けば z の正則な関数であるから解析接続をすると

$$\Gamma(z) = \frac{-1}{2i\ \sin \pi z} \int_C e^{-t}\ (-t)^{z-1}\ dt \qquad (z \neq 0, -1, -2, \dots)$$

を得る．　**（証明終わり）**

また，　$0 < z < 1$ において関数 $g(z)$ を

$$g(z) = \Gamma(z)\ \Gamma(1-z) - \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

と定義すると，　$z \neq$ 整数 である領域で正則であり，(1.13) から

$$g(z) = 0 \qquad (0 < z < 1)$$

となる．ここで, 正則な関数がある曲線上で連続的に 0 であれば, その関数はいたるところ 0 であるから

$$\Gamma(z)\ \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \qquad z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{1.27}$$

をえる．