Probabilités — Exercices

Note : l'orthographe française est compliquée… le mot binome *peut s'écrire de dix manières différentes (et ne parlons pas des* polynomes *et consorts). Aussi, et j'engage fortement mes lecteurs à procéder de même, j'ai décidé de supprimer l'accent circonflexe dans tous les cas… (ainsi que l'Académie Française le recommande d'ailleurs lorsque ce dernier n'est pas nécessaire).*

1. Rappels et exercices de base

1. 1. QCM 1 (P. Engel)

1. A et B sont deux évènements indépendants tels que $p(A) = 0{,}2$ et $p(B) = 0{,}3$ alors $p(A \cup B) =$….

a. 0,06	b. 0,44	c. 0,5	d. 0,56

2. A et B sont deux évènements. $p(A \cap \overline{B}) =$ ……

a. $p(A) - p(A \cap B)$	b. $p(B) - p(A \cap B)$	c. $p(\overline{B}) - p(A \cap B)$	d. $p(A) - p(A \cap \overline{B})$

3. Une urne contient 5 boules noires et 3 boules blanches. On tire successivement et sans remises 2 boules de l'urne. La probabilité de l'événement : « la 2$^{\text{ième}}$ boule tirée est noire sachant que la première l'est aussi » est égale à ….

a. $\frac{5}{4}$	b. $\frac{25}{64}$	c. $\frac{5}{14}$	d. $\frac{4}{7}$

4. Lors d'une course de chevaux comportant 20 partants, la probabilité de gagner le tiercé dans le désordre est combien de fois supérieure à la probabilité de gagner le tiercé dans l'ordre ?

a. 10 fois	b. 6 fois	c. 5 fois	d. 3 fois

5. Dans un tiroir il y a 3 paires de chaussettes de couleurs différentes, on tire au hasard 2 chaussettes ; la probabilité qu'elles appartiennent à la même paire est égale à ….

a. $\frac{1}{3}$	b. $\frac{1}{5}$	c. $\frac{1}{6}$	d. $\frac{1}{2}$

6. Une seule de ces 4 affirmations est fausse laquelle ?

a. Deux évènements incompatibles ne sont pas nécessairement indépendants	b. Si $p(A) \neq 0$ alors $p_A(A)=1$	c. Dans un jeu de 32 cartes, la probabilité d'obtenir les 4 as dans une main de 5 cartes est inférieure à un dix millième.	d. Que l'on joue au loto ou pas, la probabilité de gagner le gros lot est identique au millionième près

7. On considère l'épreuve qui consiste à lancer un dé non truqué. On gagne 20 **€** si on obtient le 6, on perd 4 **€** sinon. L'espérance de gain pour ce jeu est ….

a. Impossible à déterminer	b. Négative	c. Positive	d. Nulle

8. On choisit au hasard une boule d'une urne contenant 3 boules rouges numérotées 1, 2 et 3, deux boules vertes numérotées 1 et 2 et une boule bleue numérotée 1. On considère les évènements suivants :

R : «La boule tirée est rouge » ; A : « la boule tirée est numérotée 1 » ; B : « la boule tirée est numérotée 2 ».

Laquelle de ces 4 affirmations est vraie ?

a. Il n'y a pas d'évènements indépendants	b. R et A sont indépendants	c. A et B sont indépendants	d. R et B sont indépendants

9. En considérant une année de 365 jours, la probabilité pour que dans un groupe de 23 personnes choisies au hasard, 2 personnes au moins aient la même date anniversaire est……

a. Inférieure à 0,5	b. Egale à 0,5	c. Supérieure à 0,5	d. Proche de 0,003

10. Un élève répond au hasard aux 10 questions de ce QCM. La probabilité qu'il obtienne la moyenne est environ égale à ….

a. 0,003	b. 0,058	c. 0,078	d. 0,0035

1. 2. QCM 2, Antilles 2005

3 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de quatre questions, chacune comporte trois réponses, une seule est exacte. On notera sur la copie uniquement la lettre correspondant à la réponse choisie.

Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies.

40% des écrivains de romans policiers sont français et 70% des écrivains biographiques sont français.

Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :	a. 0,4	b. 0,75	c. $\frac{1}{150}$
2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :	a. 0,3	b. 0,8	c. 0,4
3. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier français est :	a. 1,15	b. 0,4	c. 0,3
4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :	a. 0,9	b. 0,7	c. 0,475
5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :	a. $\frac{4}{150}$	b. $\frac{12}{19}$	c. 0,3
6. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque. La probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :	a. $1-(0,25)20$	b. $20\times 0,75$	c. $0,75\times(0,25)20$

1. 3. QCM, Liban 2009, *3 points*

Pour chacune des trois questions. une seule des quatre propositions est exacte. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. On désigne par A et B deux évènements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité p.

On sait que $p(A\cup B)=\frac{4}{5}$ et $p(\overline{A})=\frac{3}{5}$. La probabilité de l'évènement B est égale à :

a. $\frac{2}{5}$ b. $\frac{2}{3}$ c. $\frac{3}{5}$ d. $\frac{1}{2}$

2. On note X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=0,04$.

On rappelle que pour tout réel t positif, la probabilité de l'événement $X\le t$, notée $p(X\le t)$, est donnée par $p(X\le t)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx$. La valeur approchée de $p(X>5)$ à 10^{-2} près par excès est égale à :

a. 0,91 b. 0,18 c. 0,19 d. 0,82

3. Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre. S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\frac{1}{10}$; s'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\frac{9}{10}$. Je sors mon chien ; la probabilité qu'il ne pleuve pas est égale à :

a. $\frac{9}{10}$ b. $\frac{27}{40}$ c. $\frac{3}{4}$ d. $\frac{27}{28}$

1. 4. QCM, C. étrangers 2007

4 points

Pour chacune des questions de ce QCM une seule, des trois propositions A, B ou C est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif la note de l'exercice est ramenée à* 0.

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher, 5 sont rouges et 3 sont noires.

1. On tire au hasard simultanément 3 boules de l'urne.

a. La probabilité de tirer 3 boules noires est :

A	B	C
$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{3}$

b. La probabilité de tirer 3 boules de lamême couleur est :

A	B	C
$\frac{11}{56}$	$\frac{11}{120}$	$\frac{16}{24}$

2. On tire au hasard une boule dans l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs et deux à deux indépendants.

a. La probabilité d'obtenir 5 fois une boule noire est :

A	B	C
$\left(\frac{3}{8}\right)^3\times\left(\frac{5}{8}\right)^3$	$\left(\frac{3}{8}\right)^3$	$\left(\frac{1}{5}\right)^5$

b. La probabilité d'obtenir 2 boules noires et 3 boules rouges est :

A	B	C
$\left(\frac{5}{8}\right)^3\times\left(\frac{3}{8}\right)^2$	$2\times\frac{5}{8}+3\times\frac{3}{8}$	$10\times\left(\frac{5}{8}\right)^3\times\left(\frac{3}{8}\right)^2$

3. On tire successivement et sans remise deux boules dans cette urne. On note :

– R_1 l'évènement : « La première boule tirée est rouge » ;
– N_1 l'évènement : « La première boule tirée est noire » ;
– R_2 l'évènement : « La deuxième boule tirée est rouge » ;
– N_2 l'évènement : « La deuxième boule tirée est noire ».

a. La probabilité conditionnelle $P_{R_1}(R_2)$ est :

A	B	C
$\frac{5}{8}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{14}$

b. La probabilité de l'évènement $R_1 \cap N_2$ est :

A	B	C
$\frac{16}{49}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{15}{56}$

c. La probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage est :

A	B	C
$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{28}$

d. La probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage sachant qu'on a obtenu une boule noire au second tirage est :

A	B	C
$\frac{15}{56}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{7}$

1. 5. QCM, France 2007

4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. On donnera sur la feuille la réponse choisie sans justification. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon. Dans certaines questions, les résultats proposés ont été arrondis à 10^{-3} près.

1. Un représentant de commerce propose un produit à la vente. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'il rencontre un client, la probabilité qu'il vende son produit est égale à 0,2. Il voit cinq clients par matinée en moyenne. La probabilité qu'il ait vendu exactement deux produits dans une matinée est égale à :

a. 0,4	b. 0,04	c. 0,1024	d. 0,2048

2. Dans une classe, les garçons représentent le quart de l'effectif. Une fille sur trois a eu son permis du premier coup, alors que seulement un garçon sur dix l'a eu du premier coup. On interroge un élève (garçon ou fille) au hasard. La probabilité qu'il ait eu son permis du premier coup est égale à :

a. 0,043	b. 0,275	c. 0,217	d. 0,033

3. Dans la classe de la question 2, on interroge un élève au hasard parmi ceux ayant eu leur permis du premier coup. La probabilité que cet élève soit un garçon est égale à :

a. 0,100	b. 0,091	c. 0,111	d. 0,25

4. Un tireur sur cible s'entraîne sur une cible circulaire comportant trois zones délimitées par des cercles concentriques, de rayons respectifs 10, 20 et 30 centimètres.

On admet que la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone et que le tireur atteint toujours la cible. La probabilité d'atteindre la zone la plus éloignée du centre est égale à :

a. $\frac{5}{9}$	b. $\frac{9}{14}$	c. $\frac{4}{7}$	d. $\frac{1}{3}$

1. 6. QCM, N. Calédonie 2007

4 points

Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte les points attribués à la question, une réponse inexacte enlève la moitié des points attribués à la question, l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif la note est ramenée à 0.

A. Un sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, successivement, trois boules du sac, en remettant chaque boule tirée dans le sac avant le tirage suivant.

Question 1 : La probabilité de tirer trois boules noires est :

a. $\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}$	b. $\frac{9}{8}$	c. $\left(\frac{1}{2}\right)^3$	d. $\frac{4\times3\times2}{8\times7\times6}$

Question 2 : Sachant que Jean a tiré 3 boules de la même couleur, la probabilité qu'il ait tiré 3 boules rouges est :

a. 0	b. $\left(\frac{1}{8}\right)^3$	c. $\frac{23}{128}$	d. $\frac{1}{92}$

B. Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x)=x+m$ où m est une constante réelle.

Question 3 : f est une densité de probabilité sur l'intervalle [0 ; 1] lorsque :

a. $m=-1$	b. $m=\frac{1}{2}$	c. $m=e^{\frac{1}{2}}$	d. $m=e^{-1}$

C. La durée de vie en années d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre 0,2.

Question 4 : La probabilité que ce composant électronique ait une durée de vie strictement supérieure à 5 ans est :

a. $1-\frac{1}{e}$	b. $\frac{1}{e}$	c. $\frac{1}{5e}$	d. $\frac{1}{0,2}(e-1)$

1. 7. QCM divers, Antilles 2007

5 points

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro et la lettre de la question ainsi que la valeur correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte aux questions 1 et 2 rapporte 0,5 point et à la question 3 rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

On s'intéresse à deux types de pièces électroniques, P_1 et P_2, qui entrent dans la fabrication d'une boîte de vitesses automatique.

Une seule pièce de type P_1 et une seule pièce de type P_2 sont nécessaires par boîte.

L'usine se fournit auprès de deux sous-traitants et deux seulement : S_1 et S_2.

Le sous-traitant S_1 produit 80 % des pièces de type P_1 et 40 % de pièces de type P_2.

Le sous-traitant S_2 produit 20 % des pièces de type P_1 et 60 % de pièces de type P_2.

1. Un employé de l'usine réunit toutes les pièces P_1 et P_2 destinées à être incorporées dans un certain nombre de boîtes de vitesses. Il y a donc autant de pièces de chaque type.

Il tire une pièce au hasard.

a. La probabilité que ce soit une pièce P_1 est :

0,8	0,5	0,2	0,4	0,6

b. La probabilité que ce soit une pièce P_1 et qu'elle vienne de S_1 est :

0,1	0,2	0,3	0,4	0,5

c. La probabilité qu'elle vienne de S_1 est

0,2	0,4	0,5	0,6	0,8

2. Il y a 200 pièces au total. Cette fois l'employé tire deux pièces simultanément. On suppose tous les tirages équiprobables.

a. Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité que ce soit deux pièces P_1 est :

0,1588	0,2487	0,1683	0,0095

b. Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité que ce soit deux pièces P_1 et P_2 est :

0,5000	0,2513	0,5025

c. La probabilité que ce soient deux pièces fabriquées par le même fournisseur est :

$\frac{357}{995}$	$\frac{103}{199}$	$\frac{158}{995}$

3. La durée de vie exprimée en années des pièces P_1 et P_2 suit une loi exponentielle dont le paramètre λ est donné dans le tableau suivant :

λ	P_1	P_2
S_1	0,2	0,25
S_2	0,1	0,125

On rappelle que si X, durée de vie d'une pièce exprimée en années, suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $p(X \le t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'une pièce P_1 fabriquée par S_1 dure moins de 5 ans est :

0,3679	0,6321

1. 8. QCM probas diverses, La Réunion 2004

5 points

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève un demi-point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Première partie

Pour réaliser des étiquettes de publipostage, une entreprise utilise deux banques de données :

B_1, contenant 6 000 adresses, dont 120 sont erronées et 5 880 sont exactes,

B_2, contenant 4 000 adresses, dont 200 sont erronées et 3 800 sont exactes.

1. On prélève au hasard, avec remise, 10 étiquettes parmi les 6 000 réalisées à l'aide de B_1. La probabilité qu'exactement trois de ces étiquettes comportent une adresse erronée est :

A : $\dfrac{\binom{120}{3}+\binom{5880}{7}}{\binom{6000}{10}}$	**B** : $\dfrac{3}{120}$	**C** : $\binom{10}{3}\times\left(\dfrac{120}{6000}\right)^3\times\left(\dfrac{5880}{6000}\right)^7$	**D** : $\binom{10}{3}\times\left(\dfrac{3}{120}\right)^3\times\left(\dfrac{7}{5880}\right)^7$

2. Parmi les 10 000 étiquettes, on en choisit une au hasard. Sachant que l'étiquette comporte une adresse exacte, la probabilité qu'elle ait été réalisée à l'aide de B_1 est :

A : 0,98	**B** : $\dfrac{0,4\times 0,95}{0,6\times 0,98+0,6\times 0,02}$	**C** : $0,6\times 0,98$	**D** : $\dfrac{0,6\times 0,98}{0,6\times 0,98+0,4\times 0,95}$

Deuxième partie

La durée de vie, exprimée en heures, d'un robot ménager jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ (loi exponentielle de paramètre λ = 0,0005).

Ainsi la probabilité que le robot tombe en panne avant l'instant t est : $p([0\,;t[)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx$.

1. La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2 500 heures est :

A : $e^{-\frac{2\,500}{2\,000}}$	**B** : $e^{\frac{5}{4}}$	**C** : $1-e^{-\frac{2\,500}{2\,000}}$	**D** : $e^{-\frac{2\,000}{2\,500}}$

2. La durée de vie moyenne d'un robot ménager est donnée par la formule $E=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}dx$.

a. L'intégrale $\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}dx$ est égale à :

A : $\lambda\dfrac{t^2}{2}e^{-\lambda t}$	**B** : $-te^{-\lambda t}-\dfrac{e^{-\lambda t}}{\lambda}+\dfrac{1}{\lambda}$	**C** : $\lambda te^{-\lambda t}-\lambda e^{-\lambda t}-\lambda$	**D** : $te^{-\lambda t}-\dfrac{e^{-\lambda t}}{\lambda}$

b. La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :

A : 3 500	**B** : 2 000	**C** : 2531,24	**D** : 3 000

1. 9. ROC+QCM, N. Caledonie 2005

5 points

Cet exercice comporte deux parties indépendantes.

La partie I est la démonstration d'un résultat de cours. La partie II est un Q.C.M.

Partie I : Question de cours

Soient A et B deux évènements indépendants. Démontrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Partie II

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse enlève 0,5 point, l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total de cette partie est négatif, la note correspondant à la partie II est ramenée à zéro.

1. Une urne comporte cinq boules noires et trois boules rouges indiscernables au toucher. On extrait simultanément trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires et une boule rouge ?

A	$\frac{75}{512}$	B	$\frac{13}{56}$	C	$\frac{15}{64}$	D	$\frac{15}{28}$

2. Au cours d'une épidémie de grippe, on vaccine le tiers d'une population. Parmi les grippés, un sur dix est vacciné. La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population soit grippée est 0,25.

Quelle est la probabilité pour un individu vacciné de cette population de contracter la grippe ?

A	$\frac{1}{120}$	B	$\frac{3}{40}$	C	$\frac{1}{12}$	D	$\frac{4}{40}$

3. Un joueur lance une fois un dé bien équilibré.

Il gagne 10 **€** si le dé marque 1. Il gagne 1 **€** si le dé marque 2 ou 4. Il ne gagne rien dans les autres cas. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur. Quelle est la variance de X ?

A	2	B	13	C	16	D	17

4. La durée d'attente T, en minutes, à un péage d'autoroute avant le passage en caisse est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=\frac{1}{6}$. On a donc pour tout réel $t>0$:

$$P(T<t)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx \text{ avec } \lambda=\frac{1}{6}$$

où t désigne le temps exprimé en minutes.

Sachant qu'un automobiliste a déjà attendu 2 minutes, quelle est la probabilité (arrondie à 10^{-4} près) que son temps total d'attente soit inférieur à 5 minutes ?

A	0,2819	B	0,3935	C	0,5654	D	0,6065

1. 10. Exercice de base 1

On considère l'ensemble E des entiers de 20 à 40. On choisit l'un de ces nombres au hasard.

A est l'événement : « le nombre est multiple de 3 »

B est l'événement : « le nombre est multiple de 2 »

C est l'événement : « le nombre est multiple de 6 ».

Calculer p(A), p(B), p(C), p(A ∩ B), p(A ∪ B), p(A ∩ C) et p(A ∪ C).

1. 11. Exercice de base 2

On lance deux fois de suite un dé équilibré.

1. Représenter dans un tableau les 36 issues équiprobables .

2. Calculer la probabilité des événements :

A : « on obtient un double » ;

B : « on obtient 2 numéros consécutifs » ;

C : « on obtient au moins un 6 » ;

D : « la somme des numéros dépasse 7 ».

1. 12. Exercice de base 3

On lance 4 fois de suite une pièce équilibrée.

1. Dresser la liste des issues équiprobables.

2. Quel est l'événement le plus probable : A ou B ?

A : « 2 piles et 2 faces » ;

B : « 3 piles et 1 face ou 3 faces et 1 pile ».

1. 13. Exercice de base 4 : Dans une urne

Mille boules numérotées de 0 à 999 sont placées dans une urne. On tire une boule au hasard et on note X le numéro sorti.

1. Calculer la probabilité des événements :

A : « X est divisible par 5 » ;

B : « X se termine par 0 » ;

C : « X est multiple de 2 » ;

D : « X est divisible par 3 ».

2. Déterminer la probabilité des événements $A\cap C$, $A\cup C$, $B\cap D$, $B\cup D$, $A\cap D$, $A\cup D$, $A\cap B$ et $C\cup D$.

1. 14. Exercice de base 5 : La loterie

Dans une loterie, on vend 100 billets dont 3 sont gagnants.

1. On achète un billet. Quelle est la probabilité qu'il soit gagnant ?

2. On achète un deuxième billet. Quelle est la probabilité de gagner au moins un lot ?

1. 15. Exercice de base 6

Un joueur lance un dé : si le numéro est un nombre premier, le joueur gagne une somme égale au nombre considéré (en euros) ; sinon il perd ce même nombre d'euros.

1. Si X est le gain algébrique réalisé, donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique et son écart-type.

2. Le jeu est-il favorable au joueur ?

1. 16. Exercice de base 7

En fin de 1eS, chaque élève choisit une et une seule spécialité en terminale suivant les répartitions ci–dessous :

Par spécialité

Mathématiques	Sciences Physiques	SVT
40%	25%	35%

Sexe de l'élève selon la spécialité

Spécialité / Sexe	Mathématiques	Sciences physiques	SVT
Fille	45%	24%	60%
Garçon	55%	76%	40%

On choisit un élève au hasard.

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.

2. a. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants ?

F : « l'élève est une fille », M : « l'élève est en spécialité maths ».

b. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ayant choisi spécialité mathématiques ?

3. Sachant que cet(te) élève a choisi spécialité mathématiques, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

On appelle « probabilité de F sachant M » cette probabilité (conditionnelle) et on la note $P_M(F)$.

4. a. Quelle égalité faisant intervenir $P(F\cap M)$, $P(F)$ et $P_M(F)$ peut-on écrire ?

b. Comparer $P(F)$ et $P_M(F)$ et en donner une interprétation.

5. a. Sachant que cet(te) élève a choisi spécialité SVT, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

b. Comparer $P_S(F)$ et $P(F)$, et en donner une interprétation.

1. 17. Exercice de base 8, dominos, Am. Sud 2001

On considère l'ensemble E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

Avec deux chiffres disfincts x et y de E on crée un unique domino noté indifféremment $\boxed{x}\boxed{y}$ ou $\boxed{y}\boxed{x}$

Avec un chiffre z de E, on forme un unique domino double noté $\boxed{z}\boxed{z}$.

1. Montrer que l'on peut ainsi créer 36 dominos.

2. On tire au hasard un domino.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino constitué de chiffres pairs ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino dont la somme des chiffres est paire ?

3. On tire au hasard et simultanément deux dominos.

Un élève affirme : « la probabilité d'obtenir un domino double et un domino simple dont l'un des chiffres est celui du domino double est égale à $\frac{4}{45}$ ».

Son affirmation est-elle vraie ou fausse ? (*La réponse sera justifiée*).

1. 18. Exercice de base 14 : test

Un laboratoire a mis au point un éthylotest. Théoriquement , celui-ci devrait être positif lorsqu'une personne testée a un taux d'alcoolémie excessif (c'est à dire strictement supérieur au seuil toléré). Mais il n'est pas parfait :

* À un taux d'alcoolémie excessif, l'éthylotest est positif 96 fois sur cent.

* À un taux d'alcoolémie acceptable, l'éthylotest est positif 3 fois sur cent.

On suppose que ces résultats portent sur un échantillon suffisamment important pour qu'ils soient constants.

Dans une région, 95 % des conducteurs d'automobiles ont un taux d'alcoolémie acceptable.

On soumet au hasard un automobiliste de cette région à l'éthylotest.

On définit les événements suivants :

T : « L'éthylotest est positif »

S : « Le conducteur a un taux d'alcoolémie excessif »

1. Traduire mathématiquement chacune des trois données numériques de l'énoncé.

2. Quelle est la probabilité qu'un automobiliste ait un taux d'alcoolémie excessif et que l'éthylotest soit positif.

3. Calculez P(T).

4. Quelle est la probabilité que l'automobiliste ait un taux d'alcoolémie excessif si l'éthylotest est positif ?

5. Quelle est la probabilité que l'automobiliste ait un taux d'alcoolémie acceptable si l'éthylotest est négatif?

6. Quelle est la probabilité que l'éthylotest donne un résultat erroné ?

1. 19. Exercice de base 15 : sondage

Un sondage auprès de 150 personnes a donné les résultats suivants :

A la question « Consommez vous régulièrement de l'alcool ? », 50 personnes répondent oui.

A la question « Êtes-vous fumeur ? », 80 personnes répondent oui.

A la question « Êtes-vous un fumeur consommant régulièrement de l'alcool ? », 35 personnes répondent oui.

1. Représenter ces données par un diagramme.

2. Combien de personnes sont des fumeurs ne consommant pas régulièrement de l'alcool ?

3. Combien de personnes consomment régulièrement de l'alcool et ne sont pas fumeurs ?

4. Combien de personnes ne sont pas fumeurs et ne consomment pas régulièrement de l'alcool ?

5. Combien de personnes sont fumeurs ou consomment régulièrement de l'alcool ?

1. 20. Exercice de base 16 : Cartes

On tire simultanément 8 cartes d'un jeu de 32, et on appelle ce tirage une *main*.

1. Combien y a-t-il de mains différentes possibles ?

2. Combien de mains ne comportent-elles que des cartes rouges.

3. a. Combien de mains contiennent-elles le roi de pique ?

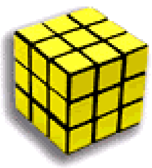
b. Combien de mains comportent-elles exactement 2 as ?

c. Combien de mais comportent-elles exactement 1 roi et 2 piques ?

d. Combien de mains comportent-elles la dame de carreau et au moins 2 cœurs ?

4. Combien de mains comportent-elles les 4 as ou les 4 rois ?

1. 21. Exercice de base 17 : Cubes



On dispose d'un cube en bois de 3 cm d'arête, peint en jaune. On le découpe, parallèlement aux faces, en 27 cubes de 1 cm d'arête. On place ces 27 cubes dans un sac.

1. On tire au hasard l'un des 27 cubes du sac. On suppose que les tirages sont équiprobables.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de faces peintes sur le cube tiré.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

2. On tire maintenant, au hasard, simultanément deux des 27 cubes du sac. On suppose que les tirages sont équiprobables.

a. Montrer que la probabilité d'avoir, au total, six faces peintes est égale à $\frac{28}{351}$.

b. On désigne par n un nombre naturel non nul ; après avoir noté le nombre de faces coloriées sur les deux premiers cubes tirés, on les remet dans le sac et on recommence l'opération de manière à effectuer n tirages successifs et indépendants de deux cubes.

Calculer la probabilité p_n pour que l'on obtienne au total $6n$ faces peintes.

c. Déterminer la plus petite valeur de n pour que p_n soit inférieur à 10^{-12}.

Les résultats des calculs seront donnés sous forme fractionnaire.

1. 22. Exercice de base 18 : Stylos

Dans un magasin se trouve un bac avec des stylos-feutres et des stylos à bille, bleus ou noirs.

On sait qu'il y a 40% de stylos-feutres parmi lesquels 10% sont bleus et qu'il y a dans le bac 15% de stylos à bille noirs.

On choisit aléatoirement un stylo dans le bac et on note :

* F l'événement : « le stylo choisi est un stylo-feutre » ;
* B l'événement : « le stylo choisi est un stylo bleu ».

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme décimale à 10^{-2} près.

1. a. Déterminer les probabilités suivantes : $p(F)$, $p_F(B)$ et $p(\overline{F}\cap\overline{B})$.

b. Calculer $p(\overline{F})$ et $p_{\overline{F}}(\overline{B})$, en déduire $p(\overline{F}\cap B)$.

c. Montrer que la probabilité de choisir un stylo bleu est égale à 0,49.

d. On a choisi un stylo bleu, quelle est la probabilité que ce soit un stylo à bille ?

2. Le gérant du magasin recompte tous les stylos du bac et trouve finalement :

* 8 stylos feutres noirs à 0,40 € l'un,

* 72 stylos feutres bleus à 0,40 € l'un,

* 90 stylos- à bille noirs à 0,70 € l'un,

* 30 stylos- à bille bleus à 0,50 € l'un.

Soit X la variable aléatoire égale au prix du stylo choisi dans le bac.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de la variable aléatoire X.

1. 23. Tintin et Milou, N. Calédonie 1993

On considère le mot MILOU. On forme des « mots », ayant un sens ou non, avec certaines de ses lettres. Chaque lettre intervient au plus une fois dans un même « mot ».

1. Combien de mots de 5 lettres peut-on faire ?

2. Combien de mots peut-on faire en tout ?

3. Combien de mots de 5 lettres dans lesquels il n'y a pas deux voyelles consécutives ?

4. Combien de mots de 6 lettres peut-on faire en employant les lettres du mot TINTIN, chaque lettre pouvant figurer autant de fois qu'elle apparaît dans le mot ?

5. Combien de mots de 6 lettres peut-on faire en employant les lettres du mot HADDOCK, chaque lettre pouvant figurer autant de fois qu'elle apparaît dans le mot ?

1. 24. Sondage, Bac E, Rennes 1977

Un enquêteur s'intéresse aux loisirs d'un groupe de 200 personnes. Il apprend que 100 pêchent, 80 lisent, et 30 pratiquent ces deux activités.

1. Représenter ces données sous la forme d'un diagramme de Caroll (autrement dit des *patates*, NDLR), le compléter.

2. On effectue un sondage en choisissant 20 personnes du groupe.

a. Combien de sous-groupes différents peut-on faire ?

b. Combien de sous groupes dans lesquels il y a exactement 10 pêcheurs ?

c. Combien de sous groupes dans lesquels les proportions de l'ensemble sont respectées (10 chasseurs, 8 lecteurs et 3 pratiquant les 2) ?

d. Combien de sous groupes dans lesquels il y a exactement 10 chasseurs et 8 lecteurs ?

On donnera les résultats en utilisant les coefficients $\binom{n}{p}$ ou les factorielles.

1. 25. Sondage écolo, Polynésie 1996

4 points

Un sondage effectué à propos de la construction d'un barrage a donné les résultats suivants :

- 65% des personnes sont contre la construction,
- parmi les personnes qui sont contre cette construction, 70% sont des écologistes,
- parmi les personnes qui sont pour la construction, 20% sont écologistes.

On note C l'événement « la personne concernée est contre la construction », D l'événement contraire, E l'événement « la personne concernée est écologiste » et F l'événement « la personne concernée est contre la construction et n'est pas écologiste ».

1. Calculer les probabilités $p(C)$, $p_C(E)$, $p_D(E)$.

2. a. Calculer la probabilité qu'une personne soit contre la construction et soit écologiste.

b. Calculer la probabilité qu'une personne soit pour la construction et soit écologiste.

c. En déduire la probabilité qu'une personne soit écologiste.

3. Calculer la probabilité $p_E(C)$.

4. Montrer que $p(F) = 0,195$. On choisit au hasard 5 personnes. Quelle est la probabilité qu'au moins une d'elles soit contre la construction et ne soit pas écologiste ?

1. 26. Archer

Une étude statistique a montré qu'un archer de très bon niveau, tirant dans une cible à onze zones numérotées 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10, a atteint avec une flèche :

– la zone 10 avec une fréquence de 0,3 ;

– la zone 9 avec une fréquence de 0,6 ;

– la zone 8 avec une fréquence de 0,1.

À chaque flèche tirée est associé un nombre de points égal au numéro de la zone atteinte.

On admet que, pour cet archer se présentant à une compétition, les probabilités des événements :

– " la flèche marque 10 ",

– " la flèche marque 9 ",

– " la flèche marque 8 ",

sont respectivement égales aux fréquences observées et que les tirs sont indépendants les uns des autres.

On appelle volée deux tirs successifs d'une flèche.

1. Cet archer tire une volée. On associe à une volée la variable aléatoire X, somme des points marqués à chacun des deux tirs de la volée. On appelle volée réussie toute volée telle que $X \geq 19$.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ? Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Vérifier que la probabilité de l'événement " $X \geq 19$ " est $\frac{9}{20}$.

Calculer la probabilité de l'événement « $17 \leq X \leq 19$ »

c. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

2. Cet archer tire trois volées successives, que l'on suppose indépendantes. On considère la variable aléatoire Y, nombre de volées réussies parmi les trois tirées. Calculer la probabilité des événements suivants :

a. « $Y = 2$ ».

b. « $Y \geq 1$ ».

3. Cet archer tire n volées successives, que l'on suppose indépendantes.

Quelle doit être la valeur minimale n_0 de n pour que la probabilité de l'événement : " une volée au moins est réussie " soit supérieure ou égale à 0,999 ?

1. 27. Arbre

Dans une classe où tous les élèves étudient l'anglais, on a testé le caractère visuel ou auditif de chacun d'eux : 70 % sont des visuels et 30 % des auditifs.

On a noté que 50 % des visuels de cette classe ont de bonnes notes en anglais, et que 80 % des auditifs de cette même classe ont de bonnes notes en anglais.

1. Proposer une représentation (arbre, tableau…) qui décrive cette situation.

2. On prend au hasard un nom sur la liste des élèves de cette classe.

Déterminer la probabilité des événements suivants :

E : « l'élève tiré est un visuel qui a de bonnes notes en anglais » ;

F : « l'élève tiré est un auditif qui a de bonnes notes en anglais » ;

G : « l'élève tiré a de bonnes notes en anglais ».

1. 28. ROC + jetons + VA, France 2009

5 points

I. Cette question est une restitution organisée de connaissances.

On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leq n$ alors $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1 \le p \le n$ on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

II. Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher : 7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3. On tire simultanément deux jetons de ce sac.

1. a. On note A l'évènement « obtenir deux jetons blancs ». Démontrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $\frac{7}{15}$.

b. On note B l'évènement « obtenir deux jetons portant des numéros impairs ». Calculer la probabilité de B.

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

1. 29. Dés+VA, Antilles 2009

4 points

Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme de fractions.

On dispose de deux dés tétraédriques identiques : les quatre faces sont marquées A, B, C et D.

1. On lance les deux dés simultanément et on note la lettre de la face sur laquelle repose chacun des dés.

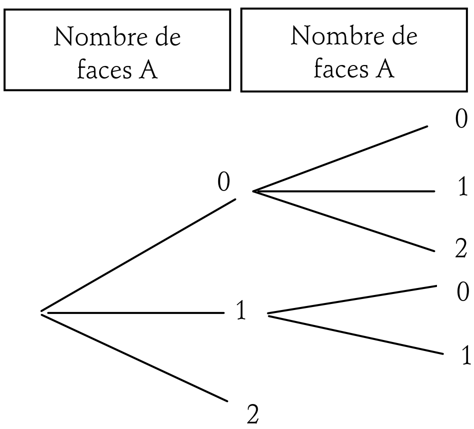
Déterminer la probabilité des événements suivants :

- E_0 : « ne pas obtenir la lettre A »,
- E_1 : « obtenir une fois la lettre A »,
- E_2 : « obtenir deux fois la lettre A ».

2. On organise un jeu de la façon suivante : le joueur lance les deux dés simultanément.

- Si les deux dés reposent sur les faces « A », le jeu s'arrête.
- Si un seul dé repose sur la face « A », le joueur relance l'autre dé et le jeu s'arrête.
- Si aucun dé ne repose sur la face « A », le joueur relance les deux dés et le jeu s'arrête.

a. Recopier et compléter l'arbre suivant en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.



b. Le joueur gagne si, lorsque le jeu s'arrête, les deux dés reposent sur les faces « A ».

Montrer que, pour le joueur, la probabilité de gagner est de $\frac{49}{256}$.

c. Pour participer, le joueur doit payer 5 euros. S'il gagne, on lui donne 10 euros. Si, lorsque le jeu s'arrête, un seul dé repose sur la face « A », il est remboursé. Sinon, il perd sa mise.

Le jeu est-il favorable au joueur ?

1. 30. Arbres, Centres étrangers 2008

4 points

Le secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel :

* les ingénieurs ; * les opérateurs de production ; * les agents de maintenance.

Il y a 8 % d'ingénieurs et 82 % d'opérateurs de production.

Les femmes représentent 50 % des ingénieurs, 25 % des agents de maintenance et 60 % des opérateurs de production.

Partie A

Dans cette partie, on interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise. On note :

* M l'événement : « le personnel interrogé est un agent de maintenance » ;
* O l'événement : « le personnel interrogé est un opérateur de production » ;
* I l'événement : « le personnel interrogé est un ingénieur » ;
* F l'événement : « le personnel interrogé est une femme ».

1. Construire un arbre pondéré correspondant aux données.

2. Calculer la probabilité d'interroger :

a. un agent de maintenance ; b. une femme agent de maintenance ; c. une femme.

Partie B

Le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue. Des études ont montré que sur une journée :

* la probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,002 ;
* la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à 0,003 ;
* la probabilité qu'une panne se produise est égale à 0,04 .

On note :

* A l'événement : « l'alarme se déclenche » ; * B l'événement : « une panne se produit ».

1. Démontrer que la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,037.

2. Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.

3. Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

1. 31. Arbre+binom, La Réunion 2008

5 points

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.

1. On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

a. On admet que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut » ;

B : « il y a au moins un stylo avec un défaut » ;

C : « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».

2. En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20 % des stylos avec défaut.

On prend au hasard un stylo dans la production. On note D l'événement « le stylo présente un défaut », et E l'événement « le stylo est accepté ».

a. Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé.

b. Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.

c. Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à 0,022 à 10^{-3} près.

3. Après le contrôle on prélève successivement et avec remise huit stylos parmi les stylos acceptés.

Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos. Comparer ce résultat avec la probabilité de l'événement A calculée à la question 1. b. Quel commentaire peut-on faire ?

1. 32. Arbre 3 niveaux, La Réunion 2005

5 points

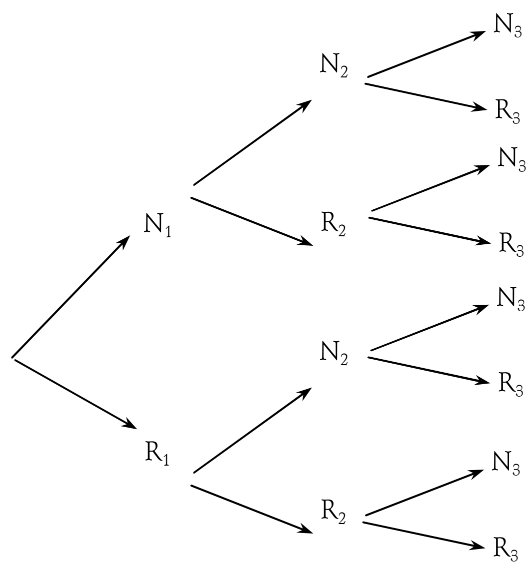
On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3.

L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2, à les mettre dans U_3, puis à tirer au hasard une boule de U_3. Pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i, (respectivement R_i) l'évènement

« on tire une boule noire de l'urne U_i » (respectivement « on tire une boule rouge de l'urneU_i »).

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant



2. a. Calculer la probabilité des évènements $N_1 \cap N_2 \cap N_3$, et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$.

b. En déduire la probabilité de l'évènement $N_1 \cap N_3$.

c. Calculer de façon analogue la probabilité de l'évènement $R_1 \cap N_3$.

3. Déduire de la question précédente la probabilité de l'évènement N_3.

4. Les évènements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?

5. Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

1. 33. Contrôle de qualité, Liban 2005

3 points

Un fabricant d'écrans plasma teste une première fois ses appareils à la sortie de la chaîne de fabrication.

Si le test est positif (c'est-à-dire si l'écran fonctionne correctement), l'écran est acheminé chez le client. Sinon l'écran retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si ce deuxième test est positif, l'écran est acheminé chez le client, sinon il est détruit.

Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70 % des écrans neufs sortis directement des chaînes de fabrication, mais que parmi les écrans réparés, seulement 65 % d'entre eux passent le second test avec succès.

On note T_1 l'évènement : « le premier test est positif ».

On note C l'évènement : « l'écran est acheminé chez le client ».

1. On choisit un écran au hasard à la sortie de la chaîne de fabrication. Déterminer les probabilités des évènements T_1 et C.

2. La fabrication d'un écran revient à 1000 € au fabricant si l'écran n'est testé qu'une fois. Cela lui coûte 50 € de plus si l'écran doit être testé une seconde fois.

Un écran est facturé a euros (a étant un réel positif) au client.

On introduit la variable aléatoire X qui, à chaque écran fabriqué, associe le «gain » (éventuellement négatif) réalisé par le fabricant.

a. Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de a.

b. Exprimer l'espérance de X en fonction de a.

c. À partir de quelle valeur de a, l'entreprise peut-elle espérer réaliser des bénéfices ?

<u>1. 34. VA, Nouvelle–Calédonie 2002</u>

Un jeu consiste à tirer simultanément trois boules d'une urne contenant six boules blanches et quatre boules rouges.

On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

Si les trois boules tirées sont rouges, le joueur gagne 100 euros ; si exactement

deux boules tirées sont rouges, il gagne 15 euros et si une seule est rouge il gagne 4 euros. Dans tous les autres cas, il ne gagne rien.

Soit X la variable alatoire qui prend pour valeurs le gain en euros du joueur lors d'un jeu.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2. Pour un jeu, la mise est de 10 euros. Le jeu est-il favorable au joueur, c'est-à-dire l'espérance mathématiques est-elle strictement supérieure à 10 ?

3. Pour l'organisateur, le jeu ne s'avérant pas suffisamment rentable, celui-ci envisage deux solutions :

- soit augmenter la mise de 1 euro, donc passer à 11 euros,
- soit diminuer chaque gain de 1 euros, c'est-à-dire ne gagner que 99 euros, 14 euros ou 3 euros.

Quelle est la solution la plus rentable pour l'organisateur ?

<u>1. 35. Boules+VA, STL, France, juin 2005</u>

4 points

Une urne contient trois boules indiscernables au toucher, numérotées respectivement 1, 2 et 3.

Le jeu proposé est le suivant : on verse d'abord 10 euros, puis on effectue trois tirages successifs d'une boule avec remise et on obtient ainsi un nombre à trois chiffres en notant dans l'ordre les trois numéros obtenus.

Par exemple, si on tire successivement 2, 3 et 1 on obtient le nombre 231. Si les trois chiffres sont identiques, on reçoit 25 euros. Si les trois chiffres sont tous différents, on reçoit 15 euros. Si la somme des trois chiffres vaut 7, on reçoit 13 euros.

Dans tous les autres cas, on ne reçoit rien.

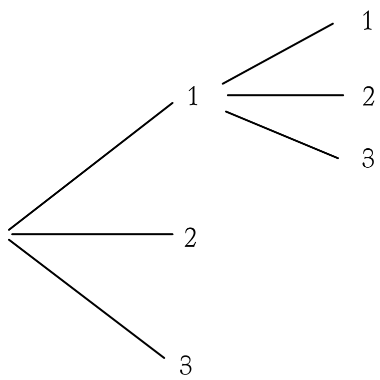
1. En s'aidant d'un arbre comme ci-dessous, donner la liste des 27 tirages possibles.

2. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaquenombre à trois chiffres obtenu, associe le gain algébrique (c'est-à-dire la différence : somme reçue moins le versement initial).

a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. Présenter dans un tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X.



1. 36. Boules+VA, STL, France, juin 2006

4 points

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher. Sur chacune d'elles est inscrit un nombre comme l'indique le tableau ci-dessous :

Nombre inscrit	1	2	5	10
Nombre de boules	4	3	2	1

Un joueur mise 4 euros, tire une boule au hasard et reçoit le montant (en euros) inscrit sur la boule.

1. Le joueur effectue un tirage.

On appelle p_1 la probabilité pour qu'il perde (c'est à dire qu'il reçoive moins de 4 euros) et p_2 la probabilité pour qu'il gagne (c'est à dire qu'il reçoive plus de 4 euros). Calculer p_1 et p_2.

2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, fait correspondre le « gain » du joueur (positif s'il gagne, négatif s'il perd).

a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?

b. Présenter la loi de probabilité de X dans un tableau.

c. Calculer son espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$.

3. Un jeu est équitable si et seulement si $\mathrm{E}(X) = 0$. On décide de changer le nombre inscrit sur une seule boule portant le nombre 1. Quel nombre doit-on y inscrire pour que le jeu soit équitable ?

1. 37. Urnes+Binom, Antilles 09/2008

4 points

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.

L'urne U_1 contient 2 billes vertes et 8 billes rouges toutes indiscernables au toucher.

L'urne U_2 contient 3 billes vertes et 7 billes rouges toutes indiscernables au toucher.

Une partie consiste, pour un joueur, à tirer au hasard une bille de l'urne U_1, noter sa couleur et remettre la bille dans l'urne U_1 puis de tirer au hasard une bille de l'urne U_2, noter sa couleur et remettre la bille dans l'urne U_2.

À la fin de la partie, si le joueur a tiré deux billes vertes il gagne un lecteur MP3. S'il a tiré une bille verte, il gagne un ours en peluche. Sinon il ne gagne rien.

On note

V_1 l'évènement : « le joueur tire une boule verte dans U_1 »

V_2 l'évènement : « le joueur tire une boule verte dans U_2 ».

Les évènements V_1 et V_2 sont indépendants.

1. Montrer, à l'aide d'un arbre pondéré, que la probabilité de gagner un lecteur MP3 est $p = 0{,}06$.

2. Quelle est la probabilité de gagner un ours en peluche ?

3. Vingt personnes jouent chacune une partie. Déterminer la probabilité que deux d'entre elles exactement gagnent un lecteur MP3.

On justifiera la réponse et on donnera une valeur approchée du résultat à 10^{-4} près.

4. On appelle n le nombre de personnes participant à la loterie un jour donné et jouant une seule fois.

On note p_n la probabilité que l'une au moins de ces personnes gagne un lecteur MP3.

Déterminer la plus petite valeur de n vérifiant $p_n > 0,99$.

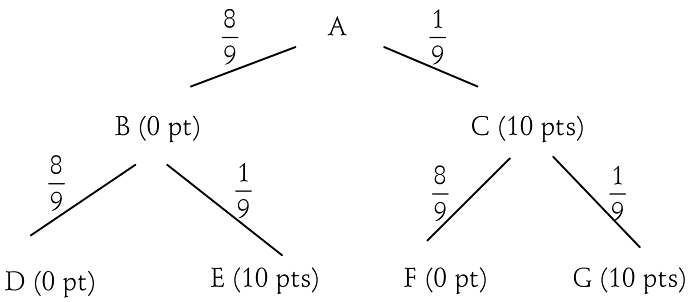
1. 38. VA + Binom, N. Calédonie 11/2008

4 points

Un joueur lance une bille qui part de A puis emprunte obligatoirement une des branches indiquées sur l'arbre ci-dessous pour arriver à l'un des points D, E, F et G.

On a marqué sur chaque branche de l'arbre la probabilité pour que la bille l'emprunte après être passée par un noeud.

Les nombres entre parenthèses indiquent les points gagnés par le joueur lors du passage de la bille. On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie c'est-à-dire une fois la bille arrivée en D, E, F ou G.



1. Dans cette question, les résultats sont attendus sous forme fractionnaire.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance de X.

c. Calculer la probabilité que la bille ait suivi la branche AC sachant que le joueur a obtenu exactement 10 points.

2. Le joueur effectue 8 parties et on suppose que ces huit parties sont indépendantes.

On considère qu'une partie est gagnée si le joueur obtient 20 points à cette partie.

a. Calculer la probabilité qu'il gagne exactement 2 parties. On donnera le résultat arrondi au millième.

b. Calculer la probabilité qu'il gagne au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

1. 39. Loterie+VA, France et La Réunion 2008

4 points

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune. La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges. La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.

Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.

La règle du jeu est la suivante :

• Le joueur mise 1 euro et lance la roue A.

• S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

• S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Soient E et F les événements :

E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges » ;

F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».

Montrer que $p(\mathrm{E}) = 0{,}02$ et $p(\mathrm{F}) = 0{,}17$.

3. Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 euros ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 euros ; sinon il ne reçoit rien.

X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel : le joueur mise 1 euro).

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.

4. Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).

a. Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que : $p_n = 1-\left(0{,}9\right)^n$.

b. Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite.

c. Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0{,}9$?

<u>1. 40. Arbre+VA+Binom, Antilles juin 2008</u>

5 points

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 contient k boule blanches (k entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.

U_2 contient 2 boules blanches et une boule noire.

On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2. On tire ensuite, au hasard, une boule dans U_2. L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

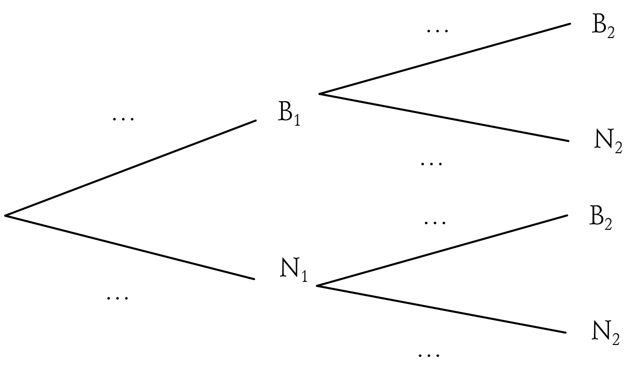
On note B_1 (respectivement N_1) l'événement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_1 ».

On note B_2 (respectivement N_2) l'événement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_2 ».

1. a. Recopier et compléter par les probabilités manquantes l'arbre ci-contre.

b. Montrer que la probabilité de l'événement B_2 est égale à $\dfrac{3k+6}{4k+12}$.

Dans la suite on considère que $k = 12$.



Les questions 2 et 3 sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

2. Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve. Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne, le joueur reçoit 12 euros. Sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise.

Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.

a. Montrer que les valeurs possibles de X sont 4 et -8.

b. Déterminer la loi de probabilité de la variable X.

c. Calculer l'espérance mathématique de X.

d. Le jeu est-il favorable au joueur ?

3. Un joueur participe n fois de suite à ce jeu.

Au début de chaque épreuve, l'urne U_1 contient 12 boules blanches et 3 noires, et l'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 noire. Ainsi, les épreuves successives sont indépendantes.

Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité de réaliser au moins une fois l'événement B_2 soit supérieure ou égale à 0,99.

1. 41. Tirages+VA, Polynésie, sept 2008

4 points

On rappelle que la probabilité d'un événement A sachant que l'événement B est réalisé se note $p_B(A)$.

Une urne contient au départ 30 boules blanches et 10 boules noires indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne :

- si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et on ajoute n boules blanches supplémentaires ;

- si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne et on ajoute n boules noires supplémentaires.

On tire ensuite au hasard une seconde boule de l'urne.

On note :

* B_1 l'événement : « on obtient une boule blanche au premier tirage » ;
* B_2 l'événement : « on obtient une boule blanche au second tirage » ;
* A l'événement : « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».

1. Dans cette question, on prend $n = 10$.

a. Calculer la probabilité $p(B_1 \cap B_2)$ et montrer que $p(B_2) = \frac{3}{4}$.

b. Calculer $p_{B_2}(B_1)$.

c. Montrer que $p(A) = \frac{3}{10}$.

2. On prend toujours $n = 10$.

Huit joueurs réalisent l'épreuve décrite précédemment de manière identique et indépendante.

On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de réalisations de l'événement A.

a. Déterminer $p(X = 3)$. (On donnera la réponse à 10^{-2} près).

b. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

3. n est un entier supérieur ou égal à 1. Existe-t-il une valeur de n pour laquelle $p(A) = \frac{1}{4}$?

1. 42. Boules+VA+répétition, Polynésie 2006

4 points

Une urne contient 4 houles blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue trois tirages successifs au hasard d'une boule selon la procédure suivante : après chaque tirage si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des trois tirages. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Calculer $P(X = 0)$.

c. On se propose de déterminer maintenant $P(X = 1)$.

– Montrer que la probabilité que la seule boule noire tirée soit obtenue au second tirage est égale à $\frac{8}{45}$.

– En remarquant que la seule boule noire peut être tirée soit au premier, soit au deuxième, soit au troisième tirage, calculer $P(X = 1)$.

2. On reprend l'urne dans sa composition initiale : 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On effectue maintenant n tirages successifs au hasard d'une boule dans l'urne selon la même procédure : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.

Soit k un entier compris entre 1 et n.

Soit N l'évènement : « la k-ième boule tirée est noire et toutes les autres sont blanches ».

Soit A l'évènement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $k-1$ premiers tirages et une boule noire au k-ième ».

Soit B l'évènement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $(n-k)$ derniers tirages ».

Calculer $P(\text{A})$, $P_{\text{A}}(\text{B})$ et $P(\text{N})$.

1. 43. Boules+VA, C Antilles 1994

Une boîte contient 60 boules blanches et 40 boules noires. On effectue dans cette boîte des tirages successifs avec remise de chaque boule après tirage. On arrête le tirage après l'obtention d'une boule blanche.

1. On limite le nombre de tirages à 4. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaire à l'obtention de la première boule blanche. Si on n'a pas tiré de boule blanche après le $4^{\text{ème}}$ tirage on prend $X=0$.

a. Calculer la probabilité $p(X=0)$.

b. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique E(X) et sa variance V(X).

2. On procède maintenant à n tirages au maximum, $n>1$. X est la v.a. définie comme précédemment, si on n'a pas tiré de boule blanche après les n tirages on prend $X=0$.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

Montrez que $E(X)=\frac{3}{5}f\left(\frac{2}{5}\right)$ où f est la fonction définie par : $f(x)=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1}$.

b. On considère la fonction g définie par $g(x)=1+x+x^2+\ldots+x^n$. Montrez par récurrence que $g(x)=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Calculez $g'(x)$ en utilisant les deux formes, déduisez-en une autre expression de $f(x)$. Calculez alors E(X).

c. Déterminez la limite de E(X) quand n tend vers $+\infty$. Interprétez.

1. 44. STL, France, sept 2004

4 points

Une urne contient trois boules : une jaune J, une verte V et une rouge R, indiscernables au toucher.

On tire successivement deux boules dans l'urne, en remettant la première, après avoir noté sa couleur, avant de tirer la deuxième.

On appelle résultat, un couple dont le premier élément est la couleur de la boule obtenue au premier tirage, et le second élément celle obtenue au second tirage. Par exemple, le couple (J ; V) est un résultat différent du couple (V ; J).

1. Déterminer l'ensemble des 9 résultats possibles (on pourra s'aider d'un tableau ou d'un arbre).

2. On convient de la règle de jeu suivante, associée au tirage précédent :

 * pour chaque boule jaune tirée, le joueur perd 3 euros ;
 * pour chaque boule verte tirée, le joueur gagne 1 euro ;
 * pour chaque boule rouge tirée, le joueur gagne k euros (où k est un nombre positif).

On désigne par X la variable aléatoire qui à tout tirage associe le gain (positif ou négatif) du joueur. Par exemple, pour le tirage (J ; V) le gain est de -2 euros.

a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. Donner la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance E(X) de la variable X en fonction de k.

d. Quelle valeur faut-il donner à k pour que le jeu soit équitable ?

1. 45. Partie de dés, STL, France, juin 2004,

5 points

Une partie de dé est organisée selon les règles suivantes : on mise 2 euros puis on lance un dé parfaitement équilibré ;

pour la sortie du 6 on reçoit 6 euros ;

pour la sortie du 5 on reçoit 2 euros ;

pour la sortie du 4 on reçoit 1 euros ;

et dans les autres cas on ne reçoit rien.

On appelle gain d'une partie la différence entre la somme reçue et la mise initiale.

1. On note X la variable aléatoire qui à l'issue d'une partie associe le gain.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Établir la loi de probabilité de X.

c. Déterminer l'espérance mathématique E(X).

2. Un joueur se présente ; il a en poche 2,50 euros.

a. Quelles sont les différentes sommes possibles qu'il peut avoir en poche à l'issue d'une partie ?

b. Déterminer la probabilité qu'il puisse jouer deux parties.

c. On suppose qu'il gagne assez à la première partie pour pouvoir jouer une deuxième partie. Quelles sont les différentes sommes possibles qu'il peut avoir en poche à l'issue des deux parties ?

1. 46. Boules+suite, Polynésie 1999

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les événements suivants :

A : « On obtient des boules des deux couleurs » ;

B : « On obtient au plus une boule blanche ».

1. a. Calculer la probabilité de l'événement : « Toutes les boules tirées sont de même couleur ».

b. Calculer la probabilité de l'événement : « On obtient exactement une boule blanche ».

c. En déduire que $p(A\cap B)=\frac{n}{2^n}$, $p(A)=1-\frac{1}{2^{n-1}}$, $p(B)=\frac{n+1}{2^n}$.

2. Montrer que $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$ si et seulement si $2^{n-1}=n+1$.

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_n=2^{n-1}-(n+1)$, $n>1$. Calculer u_2, u_3, u_4.

Montrer que u_n est strictement croissante. En déduire la valeur de l'entier n tel que les événements A et B soient indépendants.

1. 47. Boules et urnes, Am. Sud 2002

Une urne A contient une boule rouge et trois boules vertes. Une urne B contient deux boules rouges et deux boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On dispose d'un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. On le lance une fois ; si on obtient un multiple de 3, on tire au hasard une boule de l'urne A, sinon on tire au hasard une boule de l'urne B.

a. Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.

b. Quelle est la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir ?

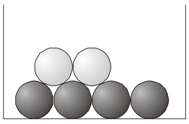
c. Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge ?

2. On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose chaque fois devant l'urne.

a. Montrer que la probabilité de l'évènement « la 3ème boule tirée est noire » vaut $\frac{1}{4}$.

b. Certains pensent que l'évènement « la première boule tirée est noire » a une probabilité supérieure à l'évènement « la troisième boule tirée est noire ». Est-ce vrai ? Justifier.

1. 48. Boules sans ou avec remise



Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires. Ces six boules sont indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément 4 boules de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir une seule boule blanche.

2. On effectue 4 tirages successifs d'une boule, sans remise.

a. Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche.

b. Calculer la probabilité de tirer une seule boule blanche au cours de ces quatre tirages.

3. On effectue maintenant quatre tirages successifs d'une boule avec remise.

a. Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche.

b. Calculer la probabilité de tirer une seule boule blanche au cours de ces quatre tirages.

c. Calculer la probabilité de n'obtenir aucune boule blanche au cours des quatre tirages.

d. Calculer la probabilité de tirer au moins une boule blanche au cours de ces quatre tirages.

4. On effectue n tirages successifs, avec remise. On appelle P_n la probabilité d'obtenir, au cours de ces n tirages, une boule blanche uniquement au dernier tirage.

a. Calculer P_1, P_2, P_3.

b. Conjecturer P_n.

1. 49. Urnes, boules, tirages, Pondicherry 1998

4 points

1. On dispose d'une urne U_1 contenant trois boules rouges et sept boules noires. On extrait simultanément deux boules de cette urne, on admet que tous les tirages sont équiprobables.

a. Quelle est la probabilité p_1 que les deux boules tirées soient rouges ?

b. Quelle est la probabilité p_2 que les deux boules tirées soient noires ?

c. Quelle est la probabilité p_3 que les deux boules tirées soient de la même couleur ?

d. Quelle est la probabilité p_4 que les deux boules tirées soient de couleurs différentes ?

2. On dispose aussi d'une deuxième urne U_2 contenant quatre boules rouges et six boules noires. On tire maintenant deux boules de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2, on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

On considère les événements suivants :

R : « Les trois boules tirées sont rouges. »

D : « Les trois boules tirées ne sont pas toutes de la même couleur »

B : « La boule tirée de l'urne U_2 est rouge ».

a. Calculer la probabilité de l'événement R.

b. Quelle est la probabilité de tirer trois boules de même couleur ?

c. Calculer la probabilité conditionnelle $p_D(B)$, probabilité de l'événement B sachant que l'événement D est réalisé.

On donnera tous les résultats sous forme de fraction irréductible.

1. 50. Urnes, boules, VA, N. Calédonie 2002

Un jeu consiste à tirer simultanément trois boules d'une urne contenant six boules blanches et quatre boules rouges.

On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

Si les trois boules tirées sont rouges, le joueur gagne 100 € ; si exactement deux boules tirées sont rouges, il gagne 15 € et si une seule est rouge il gagne 4 €. Dans tous les autre cas, il ne gagne rien.

Soit X la variable alatoire qui prend pour valeurs le gain en euros du joueur lors d'un jeu.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2. Pour un jeu, la mise est de 10 €. Le jeu est-il favorable au joueur, c'est-à-dire l'espérance mathématique est-elle strictement supérieure à 10 ?

3. Pour l'organisateur, le jeu ne s'avérant pas suffisamment rentable, celui-ci envisage deux solutions :

– soit augmenter la mise de 1 €, donc passer à 11 €,

– soit diminuer chaque gain de 1 €, c'est-à-dire ne gagner que 99 €, 14 € ou 3 €.

Quelle est la solution la plus rentable pour l'organisateur ?

1. 51. Loterie, VA, Asie 2005

5 points

Une association organise une loterie pour laquelle une participation m exprimée en euros est demandée.

Un joueur doit tirer simultanément au hasard, deux boules dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes.

Si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il a perdu.

Si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation m.

Si le joueur obtient 2 boules vertes, il peut continuer le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit :

• sur $\frac{1}{8}$ de la roue le gain est de 100 €,

• sur $\frac{1}{4}$ de la roue le gain est de 20 €,

• sur le reste le joueur est remboursé de sa participation m.

On appelle V l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules vertes ».

On appelle J l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules jaunes ».

On appelle R l'évènement « le joueur est remboursé de sa participation et ne gagne rien ».

1. Quelques calculs.

a. Calculer les probabilités $P(\mathrm{V})$ et $P(\mathrm{J})$ des évènements respectifs V et J.

b. On note $P_{\mathrm{V}}(\mathrm{R})$ la probabilité pour le joueur d'être remboursé sachant qu'il a obtenu deux boules vertes. Déterminer $P_{\mathrm{V}}(\mathrm{R})$ puis $P(\mathrm{R}\cap\mathrm{V})$.

c. Calculer $P(\mathrm{R})$.

d. Calculer la probabilité de gagner les 100 €, puis la probabilité de gagner les 20 € de la roue.

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur c'est-à-dire la différence entre les sommes éventuellement perçues et la participation initiale m.

a. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X et vérifier que $P(X=-m)$ est 0,6.

c. Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $E(X)=\dfrac{140-51m}{80}$.

d. L'organisateur veut fixer la participation m à une valeur entière en euro. Quelle valeur minimale faut-il donner à m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent ?

3. Un joueur se présente et décide de jouer 4 fois, quels que soient les résultats obtenus. Calculer la probabilité qu'il perde au moins une fois sa mise.

4. On voudrait qu'un joueur ait plus d'une chance sur deux d'être remboursé de sa mise ou de gagner quand il joue une seule fois. On note G cet évènement. Pour cela on garde deux boules vertes dans l'urne mais on modifie le nombre de boules jaunes. On appelle n le nombre de boules jaunes, on suppose $n\geq 1$.

Calculer la valeur minimale de n pour que la condition précédente soit vérifiée.

1. 52. Morpion, Polynésie 2002

On dispose d'une grille à trois lignes et trois colonnes. Une machine M_1 place au hasard un jeton dans une case de la grille, puis une machine M_2 place de même un jeton sur la grille dans une case libre et enfin une troisième machine M_3 place un jeton dans une case libre.

	A	B	C
1			
2			
3			

On note les évènements suivants :

- H : « Les trois jetons sont alignés horizontalement » ;
- V : « Les trois jetons sont alignés verticalement » ;
- D : « Les trois jetons sont alignés en diagonale » ;
- N : « Les trois jetons ne sont pas alignés ».

Les nombres demandés seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1. Calculer les probabilités des évènements H, V et D. En déduire que la probabilité de N est égale à $\frac{19}{21}$.

2. On considère la variable aléatoire X définie par :

- $X = 20$, lorsque H ou V est réalisé ;
- $X = \alpha$, lorsque D est réalisé ;
- $X = -2$, lorsque N est réalisé.

Déterminer α pour que l'espérance de X soit nulle.

3. Dans cette question, on se place dans le cas où la machine M_1 est déréglée ; elle place alors le premier jeton dans l'un des coins de la grille.

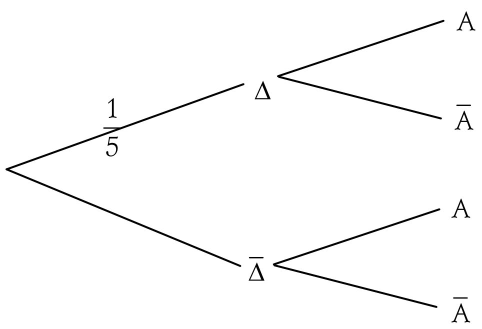
On note Δ l'évènement : « la machine M_1 est déréglée ».

a. Calculer la probabilité d'avoir un alignement horizontal c'est-àdire $p_\Delta(\mathrm{H})$, puis de même, d'avoir un alignement vertical $p_\Delta(\mathrm{V})$, d'avoir un alignement en diagonale $p_\Delta(\mathrm{D})$.

b. En déduire que la probabilité d'avoir un alignement horizontal ou vertical ou diagonal, est égale à $\frac{3}{28}$.

4. A désigne l'évènement « les trois jetons sont alignés horizontalement ou verticalement ou en diagonale ». On admet que $p(\Delta) = \frac{1}{5}$.

Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant en précisant les cinq probabilités correspondantes :



1. 53. Cartes+VA+Barycentre

On dispose d'un jeu de 32 cartes (16 noires, 16 rouges). L'expérience consiste à extraire une carte, noter sa couleur et la remettre dans le jeu, puis à extraire une nouvelle carte dont on note aussi la couleur.

Deux cartes noires font gagner deux francs.

Deux cartes rouges font perdre deux francs.

Deux cartes de couleurs différentes procurent un gain nul.

1. a. Quelle est la probabilité de gagner deux francs, de perdre deux francs, de réaliser un gain nul ?

b. On répète cinq fois l'expérience. Déterminer la probabilité de gagner dix francs.

2. Dans un plan muni du repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A (0 ; 1) ; B(–2 ; –1) ; C(2 ; –1).

L'origine O est le barycentre du système de points pondérés : {(A, a) ; (B, b) ; (C, c)}, où a, b, c, sont des réels de somme non nulle.

X est la variable aléatoire qui ne prend que les valeurs –2, 0, 2 avec les probabilités :

$$p(X=-2)=a\,;\,p(X=0)=b\,;\,p(X=2)=c.$$

a. A l'aide des coordonnées des points A, B, C, O, écrire deux équations vérifiées par les réels a, b, c.

b. Quelle est la valeur de $a+b+c$?

c. Résoudre le système de trois équations ainsi obtenu, d'inconnues a, b, c.

d. Déterminer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.

1. 54. Boules+fonction+VA, Pondichéry 2002

Partie A

Une urne contient n boules blanches ($n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 2$), 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?

2. On note $p(n)$ la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

a. Montrer que $p(n)=\dfrac{n^2-n+26}{(n+8)(n+7)}$.

b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p(n)$. Interpréter ce résultat.

Partie B

Pour les questions suivantes $n=4$.

1. Calculer $p(4)$.

2. Un tirage consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

Un joueur effectue deux tirages indépendants, en remettant dans l'urne avant le second tirage les deux boules tirées la première fois.

Il mise au départ la somme de 30 euros.

Pour chaque tirage :

- si les deux boules sont de même couleur, il reçoit alors 40 euros,
- si elles sont de couleurs différentes, il reçoit alors 5 euros.

On appelle gain du joueur la différence, à l'issue des deux tirages, entre la somme reçue par le joueur et sa mise initiale (ce gain peut être positif ou négatif). On désigne par X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance de X.

1. 55. Gripppe+binomiale

Le directeur du personnel d'une entreprise constate que, chaque hiver, un nombre important d'employés s'absentent, malades de la grippe. Le médecin de l'entreprise lui assure qu'une personne non vaccinée contre la grippe a 40 % de chances d'attraper la maladie alors qu'une personne vaccinée n'a que 5 % de chances de tomber malade.

Le directeur décide donc de proposer au personnel une vaccination gratuite.

1. On choisit un employé au hasard et on considère les événements suivants :

V : l'employé s'est fait vacciner.

G : l'employé contractera la grippe durant l'hiver.

On note $P_E(F)$ la probabilité d'un événement F sachant que E s'est réalisé.

a. Déterminer les probabilités suivantes : $P_V(G)$, $P_V(\overline{G})$, $P_{\overline{V}}(G)$ et $P_{\overline{V}}(\overline{G})$.

b. Exprimer la probabilité $P(G)$ en fonction de la probabilité $P(V)$.

2. Déterminer le pourcentage minimum de personnes à vacciner pour que moins de 20% des employés aient la grippe cet hiver.

3. Finalement 80 % du personnel accepte de se faire vacciner.

a. Quelle est la probabilité p_1 qu'un employé, pris au hasard, tombe malade cet hiver ?

b. Fred, employé au service informatique, tombe malade de la grippe. Quelle est la probabilité p_2 qu'il soit vacciné ?

c. Calculer la probabilité p_3 qu'un employé, pris au hasard, ne soit pas vacciné et attrape la grippe cet hiver.

4. L'entreprise comporte 500 personnes. On considère que le fait pour une personne de tomber malade est indépendant du fait que d'autres personnes le soient.

a. On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes malades. Quelle est la loi de probabilité de X ?

b. Quel est le nombre moyen de personnes qui tomberont malades de la grippe cet hiver ? En moyenne dans quel intervalle ce nombre peut-il varier ?

c. Pour assurer le bon fonctionnement de l'entreprise le chef du personnel envisage l'embauche de 10 intérimaires. Que pensez vous de cette décision, sachant qu'avec plus de 50 personnes malades l'entreprise ne fonctionne plus.

1. 56. Sondage+binomiale

On considère un groupe de 16 personnes parmi lesquelles 4 ont une caractéristique C . Ces 4 personnes seront dites de type C . On prend simultanément et au hasard 5 personnes dans le groupe.

1. a. Calculer la probabilité p_a de n'avoir aucune personne du type C

b. Calculer la probabilité p_b d'avoir exactement une personne du type C

c. Calculer la probabilité p_c d'avoir au moins deux personnes du type C.

d. On sait que deux des personnes choisies sont du type C. Déterminer alors la probabilité d'avoir quatre personnes de type C.

Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible puis sous forme décimale à 10^{-4} près

2. On constate après enquête que dans la population entière 25% des gens sont du type C. On estime que le nombre de personnes est suffisamment important pour pouvoir utiliser une loi binomiale.

On choisit au hasard n personnes ($n > 2$) et on appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes ayant le type C.

a. Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer $p(X=0)$ et $p(X=1)$ en fonction de n et en déduire la probabilité p_n d'avoir au moins deux personnes de type C.

b. Démontrer que $p_n \geq 0{,}9$ si et seulement si $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{3+n}{4}\right) \leq 0{,}1$.

c. On pose $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{3+n}{4}\right)$. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et démontrer que u_n est décroissante.

d. Par essais successifs trouver la plus petite valeur de n telle que $p_n \geq 0,9$.

1. 57. Questionnaire+VA

Dans cet exercice, les résultats seront donnés *sous forme de fractions irréductibles*.

Dans un jeu, il s'agit de trouver la bonne réponse à une question posée. Les questions sont classées en trois catégories : sport, cinéma, musique. Dans chaque catégorie, il y a le même nombre de questions. Les trois catégories sont donc équiprobables.

Alain, fervent supporter de ce jeu, est conscient qu'il a :

– 5 chances sur 6 de donner la bonne réponse sachant qu'il est interrogé en sport ;

– 2 chances sur 3 de donner la bonne réponse sachant qu'il est interrogé en cinéma ;

– 1 chance sur 9 de donner la bonne réponse sachant qu'il est interrogé en musique.

1. Alain participe à ce jeu et tire au hasard une question. Déterminer la probabilité que :

a. la question soit dans la catégorie sport et qu'il donne la bonne réponse ;

b. sa réponse soit bonne à la question posée.

2. Pour participer au jeu, Alain doit payer 10 € de droit d'inscription. Il recevra :

– 10 € s'il est interrogé en sport et que sa réponse est bonne ;

– 20 € s'il est interrogé en cinéma et que sa réponse est bonne ;

– 50 € s'il est interrogé en musique et que sa réponse est bonne ;

– 0 € si la réponse qu'il donne est fausse.

Soit X la variable aléatoire égale au gain d'Alain (on appelle gain la différence, en francs, entre ce qu'il reçoit et les 10 € de droit d'inscription).

a. Déterminer les valeurs prises par X.

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.

Alain a-t-il intérêt à jouer ?

1. 58. Urnes+VA

On dispose de deux urnes :

- une urne U_1 dans laquelle se trouvent trois boules blanches et deux boules noires ;

- une urne U_2 dans laquelle il y a deux boules blanches et trois boules noires.

Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de chaque urne : on obtient ainsi quatre boules, les tirages dans chaque urne étant équiprobables.

1. Montrer que la probabilité de l'événement E : « Parmi les quatre boules tirées, il y a exactement deux boules blanches » est égale à 0,46.

2. On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules blanches obtenues.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Le joueur doit verser 2,50 € avant d'effectuer le tirage : il reçoit à l'issue du tirage 1 € par boule blanche obtenue. Le jeu est-il équitable ?

3. Calculer la probabilité d'avoir tiré une et une seule boule blanche de l'urne U_1 sachant qu'on a tiré deux boules blanches.

4. On ne considère que l'urne U_1, de laquelle on tire toujours au hasard et simultanément deux boules. On nomme succès le tirage de deux boules blanches. On renouvelle dix fois la même épreuve (en remettant chaque fois les boules tirées dans l'urne). Déterminer la probabilité d'avoir au moins un succès sur les dix tirages.

1. 59. Raquettes

Lorsque les éléphants sautent en parachute au-dessus de la savane, ils chaussent des raquettes pour ne pas s'enliser. Il y a deux types de raquettes pour pachydermes : des à petit tamis et des à grand tamis. Certains éléphants préfèrent mettre quatre raquettes à petit tamis (une à chaque patte) tandis que d'autres préfèrent porter deux raquettes à grand tamis (aux pattes postérieures). La probabilité qu'une raquette se détache avant l'arrivée au sol est la même pour les deux types et est notée p.

1. Un éléphant saute avec quatre raquettes : quelle est la probabilité P qu'il ait moins (strictement) de deux raquettes à l'atterrissage ?

2. Un éléphant saute avec deux raquettes : quelle est la probabilité Q qu'il n'ait aucune raquette à l'atterrissage ?

3. Sachant qu'un éléphant s'enlise s'il a perdu plus de la moitié de son équipement, comparer, en fonction de valeurs de p, les probabilités de s'enliser avec chaque type de chausse.

1. 60. Code d'entrée

Le code d'entrée d'un immeuble est composé de 5 symboles parmi les chiffres de 0 à 9 et les lettres A et B. Un même symbole peut être utilisé plusieurs fois.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?

2. Combien de codes ne comportent que des chiffres pairs ?

3. Combien de codes contiennent un et un seul 0 ?

4. Combien de codes contiennent au moins une lettre ?

5. Un nouveau syndic est nommé, qui décide que pour des raisons de sécurité, le code doit comporter au moins un chiffre et au moins une lettre. Combien y a-t-il dorénavant de codes possibles ?

6. Un SDF veut dormir dans le hall. Il sait par une indiscrétion que le code comporte les chiffres 1258 et la lettre B. Combien de codes devra-t-il essayer au maximum avant de passer la nuit au chaud ?

1. 61. Station-service, France 1998

1. Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station service est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité $p_i = P(X = i)$:

i	0	1	2
p_i	0,1	0,5	0,4

a. Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de x et son écart type.

2. Dans cette station service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est de 0,7 ; celle qu'il achète du gazole est 0,3. Le choix de chaque client est indépendant de celui des clients précédents. On considère les événements :

C_1 : En cinq minutes, un seul client se présente ;

C_2 : En cinq minutes, deux clients se présentent ;

E : En cinq minutes, un seul client achète de l'essence.

a. Calculer $P(C_1 \cap E)$.

b. Montrer que $P_{C_2}(E) = 0,42$ et calculer $P(C_2 \cap E)$.

c. En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.

3. Y désigne la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes. Déterminer la loi de probabilité de Y et calculer son espérance.

1. 62. Avec de la géométrie, Am. du Sud 2003

4 points

Un sac contient 4 jetons numérotés respectivement -1, 0, 0, 1 et indiscernables au toucher.

On tire un jeton du sac, on note son numéro x et on le remet dans le sac ; on tire un second jeton, on note son numéro y et on le remet dans le sac ; puis on tire un troisième jeton, on note son numéro z et on le remet dans le sac.

Tous les jetons ont la même probabilité d'être tirés.

À chaque tirage de trois jetons, on associe, dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ le point M de coordonnées (x, y, z).

Sur le graphique joint en annexe, sont placés les 27 points correspondant aux différentes positions possibles du point M. Les coordonnées du point A sont $(1\,;\,-1\,;\,-1)$ dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.

On note C le cube ABCDEFGH.

1. Démontrer que la probabilité que le point M soit en A est égale à $\frac{1}{64}$.

2. On note E_1 l'évènement : « M appartient à l'axe des abscisses ». Démontrer que la probabilité de E_1 est égale à $\frac{1}{4}$.

3. Soit P le plan passant par O et orthogonal au vecteur $\vec{n}\,(1\,;\,1\,;\,1)$.

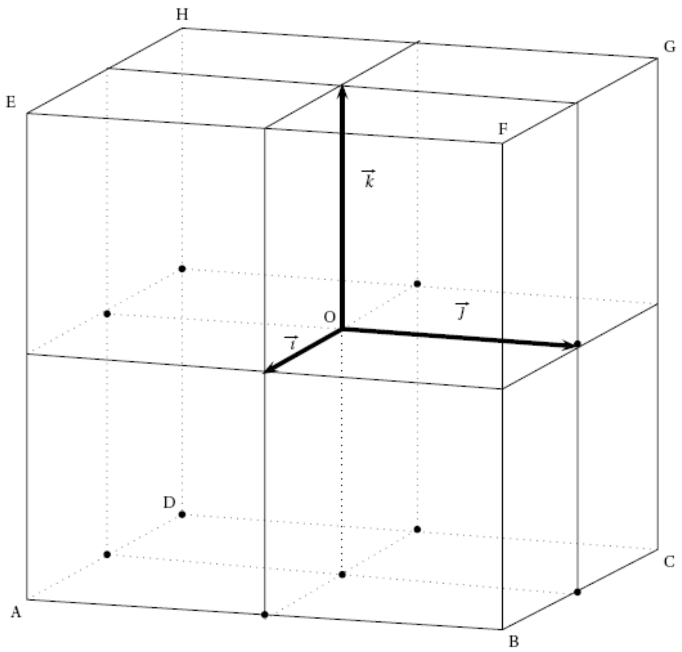
a. Déterminer une équation cartésienne du plan P .

b. Tracer en couleur sur le graphique la section du plan P et du cube C. (On ne demande pas de justification).

c. On note E_2 l'évènement : « M appartient à P ». Quelle est la probabilité de l'évènement E_2 ?

4. On désigne par B la boule de centreO et de rayon 1,5 (c'est-à-dire l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM \leq 1{,}5$).

On note E_3 l'évènement : « M appartient à la boule B ». Déterminer la probabilité de l'évènement E_3.



1. 63. Géométrie+VA, Antilles remplt 2007

6 points

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une urne contient 15 boules identiques indiscernables au toucher de couleur moire, blanche ou rouge. On sait de plus qu'il y a au moins deux boules de chaque couleur dans l'urne. On tire au hasard simultanément 2 boules dans l'urne et on note leur couleur.

Soit l'événement G : « obtenir deux boules de même couleur ».

Partie A

On suppose que l'urne contient 3 boules noires et 7 boules blanches.

Calculer la probabilité de l'événement G.

Partie B

On note n, b et r le nombre de boules respectivement noires, blanches et rouges figurant dans l'urne.

1. On note $g(n, b, r)$ la probabilité en fonction de n, b et r de l'événement G.

Démontrer que $g(n, b, r) = \frac{1}{210}\left[n(n-1)+b(b-1)+r(r-1)\right]$.

2. Le but de cette question est de déterminer n, b et r de sorte que la probabilité $g(n, b, r)$ soit minimale.

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les points N, B et R de coordonnées respectives $(15\,;0\,;0)$, $(0\,;15\,;0)$ et $(0\,;0\,;15)$ et soit M le point de coordonnées $(n\,;b\,;r)$.

On pourra se reporter à la figure ci-dessous.

a. Justifier qu'une équation du plan (NBR) est $x+y+z-15=0$.

b. En déduire que le point M est un point du plan (NBR).

c. Démontrer que $g(n, b, r) = \frac{1}{210}\left(OM^2 - 15\right)$.

d. Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (NBR). Déterminer les coordonnées du point H.

e. En déduire les valeurs de n, b et r afin que la probabilité $g(n, b, r)$ soit minimale. Justifier que cette probabilité minimale est égale à $\frac{2}{7}$.

Partie C

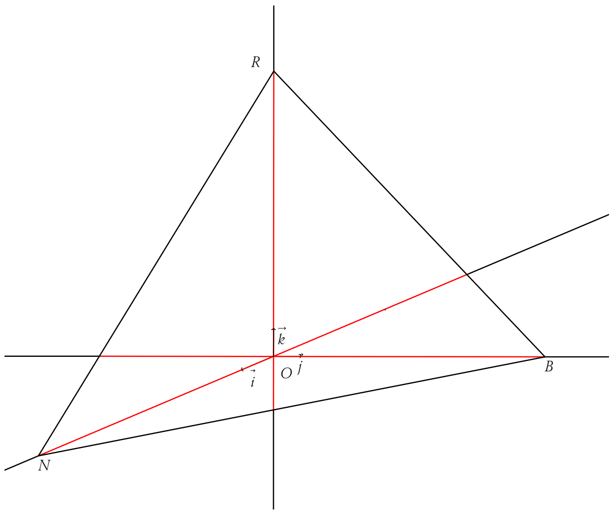
On suppose que les nombres de boules de chaque couleur ont été choisis par l'organisateur d'un jeu, de telle sorte que la probabilité de l'événement G soit égale à $\frac{2}{7}$.

Un joueur mise x euros, avec x entier naturel non nul, puis tire simultanément au hasard deux boules de l'urne. Dans tous les cas, il perd sa mise de départ. S'il obtient deux boules de même couleur, il reçoit k fois le montant de sa mise, avec k nombre décimal strictement supérieur à 1. Sinon il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable X en fonction de x et k.

2. Déterminer la valeur de k pour laquelle le jeu est équitable.



2. Loi binomiale

2. 64. ROC+Binomiale, Centres étrangers 2009

5 points

1. Restitution organisée de connaissances

Prérequis : Deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité p si et seulement si : $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$.

Soient A et B deux événements associés à une expérience aléatoire.

a. Démontrer que $p(B)=p(B\cap A)+p\left(B\cap \overline{A}\right)$.

b. Démontrer que, si les événements A et B sont indépendants pour la probabilité p, alors les événements $\overline{A}$ et B le sont également.

2. Application

Chaque matin de classe Stéphane peut être victime de deux événements indépendants :

- R : « II n'entend pas son réveil sonner » ;
- S : « Son scooter, mal entretenu, tombe en panne ».

II a observé que chaque jour de classe, la probabilité de R est égale 0,1 et que celle de S est égale à 0,05. Lorsque qu'au moins l'un des deux événements se produit, Stéphane est en retard au lycée sinon il est à l'heure.

a. Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.

b. Calculer la probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe donné.

c. Au cours d'une semaine, Stéphane se rend cinq fois au lycée. On admet que le fait qu'il entende son réveil sonner un jour de classe donné n'influe pas sur le fait qu'il l'entende ou non les jours suivants.

Quelle est la probabilité que Stéphane entende le réveil au moins quatre fois au cours d'une semaine ? Arrondir le résultat à la quatrième décimale.

2. 65. Contrôle de fabrication, Polynésie 2009

4 points

Une entreprise fabrique des lecteurs MP3 dont 6 % sont défectueux.

Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite.

Cette unité de contrôle rejette 98 % des lecteurs MP3 défectueux et 5% des lecteurs MP3 fonctionnant correctement.

On note :

- D l'évènement : « le lecteur MP3 est défectueux » ;
- R l'évènement : « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ».

1. Faire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.

2. a. Calculer la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté.

b. On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque le lecteur MP3 est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux.

Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.

3. Montrer que la probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à 0,8942.

4. Quatre contrôles successifs indépendants sont maintenant réalisés pour savoir si un lecteur MP3 peut être commercialisé. Un lecteur MP3 est :

- commercialisé avec le logo de l'entreprise s'il subit avec succès les quatre contrôles successifs,
- détruit s'il est rejeté au moins deux fois,
- commercialisé sans le logo sinon.

Le coût de fabrication d'un lecteur MP3 s'élève à 50 euros. Son prix de vente est de 120 euros pour un lecteur avec logo et 60 euros pour un lecteur sans logo.

On désigne par G la variable aléatoire qui, à chaque lecteur MP3 fabriqué, associe le gain algébrique en euros (éventuellement négatif) réalisé par l'entreprise.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

b. Calculer à 10^{-2} près l'espérance mathématique de G. Donner une interprétation de ce résultat.

2. 66. Contrôle+binomiale, La Réunion 2009

5 points

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut a et le défaut b. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Dans cette question les probabilités demandées seront données avec leurs valeurs décimales exactes.

On prélève un sac au hasard dans la production d'une journée.

On note A l' évènement « le sac présente le défaut a » et B l'évènement « le sac présente le défaut b ». Les probabilités des évènements A et B sont respectivement $p(\text{A}) = 0,02$ et $p(\text{B}) = 0,01$; on suppose que ces deux évènements sont indépendants.

a. Calculer la probabilité de l'évènement C : « le sac prélevé présente le défaut a et le défaut b ».

b. Calculer la probabilité de l'évènement D : « le sac est défectueux ».

c. Calculer la probabilité de l'évènement E : « le sac ne présente aucun défaut ».

d. Sachant que le sac présente le défaut a, quelle est la probabilité qu'il présente aussi le défaut b ?

2. On suppose que la probabilité (arrondie au centième) qu'un sac soit défectueux est égale à 0,03.

On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Quelle est la probabilité de l'évènement « au moins un sac est défectueux » ? On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.

c. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

2. 67. Fabrication+binomiale, Asie 2009

5 points

Une entreprise fait fabriquer des paires de chaussettes auprès de trois fournisseurs F_1, F_2, F_3.

Dans l'entreprise, toutes ces paires de chaussettes sont regroupées dans un stock unique.

La moitié des paires de chaussettes est fabriquée par le fournisseur F_1, le tiers par le fournisseur F_2 et le reste par le fournisseur F_3.

Une étude statistique a montré que

- 5 % des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur F_1 ont un défaut ;
- 1,5 % des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur F_2 ont un défaut ;
- sur l'ensemble du stock, 3,5 % des paires de chaussettes ont un défaut.

1. On prélève au hasard une paire de chaussettes dans le stock de l'entreprise. On considère les évènements F_1, F_2, F_3 et D suivants :

- F_1 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur F_1 » ;
- F_2 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur F_2 » ;
- F_3 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur F_3 » ;
- D : « La paire de chaussettes prélevée présente un défaut ».

a. Traduire en termes de probabilités les données de l'énoncé en utilisant les évènements précédents.

Dans la suite, on pourra utiliser un arbre pondéré associé à cet expérience.

b. Calculer la probabilité qu'une paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur F_1 et présente un défaut.

c. Calculer la probabilité de l'évènement $F_2 \cap D$.

d. En déduire la probabilité de l'évènement $F_3 \cap D$.

e. Sachant que la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur F_3, quelle est la probabilité qu'elle présente un défaut ?

2. L'entreprise conditionne les paires de chaussettes par lots de six paires. On considère que le stock est suffisamment grand pour assimiler le choix des six paires de chaussettes à des tirages indépendants, successifs avec remise.

a. Calculer la probabilité que deux paires de chaussettes exactement d'un lot présentent un défaut ; on donnera un résultat arrondi au millième.

b. Montrer que la probabilité, arrondie au millième, qu'au plus une paire de chaussettes d'un lot présente un défaut est égale à 0,983.

2. 68. VA+binomiale, Pondicherry 2009

4 points

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?

b. Quelle est son espérance ?

c. Calculer $p(X = 2)$.

2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. On lance le dé choisi trois fois de suite.

On considère les évènements D et A suivants :

- D « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
- A : « obtenir exactement deux 6 ».

a. Calculer la probabilité des évènements suivants :

- « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
- « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».

(On pourra construire un arbre de probabilité).

b. En déduire que $p(A) = \frac{7}{48}$.

c. Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).

On note B_n l'évènement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».

a. Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n de l'évènement B_n.

b. Calculer la limite de la suite (p_n). Commenter ce résultat.

2. 69. VA+binomiale, Asie 2007

4 points

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation.

Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée.

Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

* 92 % des jouets sont sans défaut de finition;
* parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 %réussissent le test de solidité ;
* 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

* F l'évènement : « le jouet est sans défaut de finition » ;
* S l'évènement : « le jouet réussit le test de solidité ».

1. Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation.

a. Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.

b. Démontrer que $p_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right)=\frac{1}{4}$.

c. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

2. Calcul de probabilités.

a. Démontrer que $p(S) = 0{,}934$.

b. Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition. (On donnera le résultat arrondi au millième.)

3. Étude d'une variable aléatoire B.

Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 euros, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5 euros.

On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B.

b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B.

4. Étude d'une nouvelle variable aléatoire.

On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 jouets. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité. On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise.

Calculer la probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité.

2. 70. Binomiale, France & La Réunion sept 2006

5 points

La scène se passe en haut d'une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

A. Un touriste se retrouve deux jours consécutifs en haut de la falaise. Le premier jour, il choisit au hasard l'une des deux directions. Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille vaut 0,8.

Pour $i = 1$ ou $i = 2$, on note E_i l'évènement : « Le touriste se dirige vers l'Est le i-ème jour » et O_i l'évènement : « Le touriste se dirige vers l'Ouest le i-ème jour ».

1. Dresser un arbre de probabilités décrivant la situation.

2. Déterminer les probabilités suivantes : $p\left(E_1\right)$; $p_{E_1}\left(O_2\right)$; $p\left(E_1 \cap E_2\right)$.

3. Calculer la probabilité que ce touriste se rende sur la même plage les deux jours consécutifs.

B. On suppose maintenant que n touristes ($n \geq 3$) se retrouvent un jour en haut de la falaise. Ces n touristes veulent tous se baigner et chacun d'eux choisit au hasard et indépendamment des autres l'une des deux directions.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces touristes qui choisissent la plage à l'Est.

1. Déterminer la probabilité que k touristes ($0 \leq k \leq n$) partent en direction de l'Est.

2. On suppose ici que les deux plages considérées sont désertes au départ. On dit qu'un touriste est heureux s'il se retrouve seul sur une plage.

a. Peut-il y avoir deux touristes heureux ?

b. Montrer que la probabilité (notée p) qu'il y ait un touriste heureux parmi ces n touristes vaut : $p=\dfrac{n}{2^{n-1}}$.

c. Application numérique : lorsque le groupe comprend 10 personnes, exprimer la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste heureux parmi les 10.

2. 71. Aire et tir, La Réunion 2006

6 points

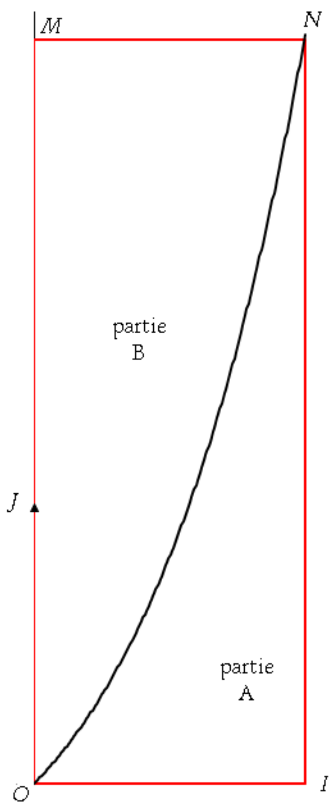
Première partie : Calculer l'intégrale $\int_0^1 xe^x\,dx$.

Deuxième partie

La figure ci-dessous représente une cible rectangulaire $OIMN$ telle que, dans le repère orthonormal $\left(O\,;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$, la ligne courbe C reliant le point O au point M est une partie de la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^x$.

Cette courbe partage la cible $OIMN$ en deux parties A et B comme l'indique la figure ci-dessous.

Un jeu consiste à lancer une fléchette qui atteint soit l'extérieur de la cible, soit l'une des parties A ou B. On admet que la fléchette ne peut atteindre aucune des frontières de la cible, ni la courbe C .



Une étude statistique a montré que la fléchette tombe à l'extérieur de la cible avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$ et que les probabilités d'atteindre les parties A et B sont proportionnelles à leurs aires respectives.

1. Démontrer que la probabilité d'atteindre la partie A est égale à $\dfrac{1}{2e}$. Quelle est la probabilité d'atteindre la partie B ?

2. On lance de manière indépendante trois fléchettes.

a. Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de fléchettes ayant atteint la partie A. Définir la loi de probabilité de X. En déduire la valeur exacte de son espérance mathématique.

b. Soit E l'évènement : « Exactement deux fléchettes atteignent la partie A ». Calculer une valeur approchée au millième de la probabilité de E.

c. Soit F l'évènement : « les trois fléchettes atteignent la partie B ». Calculer la probabilité de F (on donnera la valeur exacte).

Sachant qu'aucune fléchette n'a atteint l'extérieur de la cible, quelle est la probabilité que toutes les trois se trouvent dans la partie B ?

3. On lance cette fois de manière indépendante n fléchettes.

a. Déterminer en fonction de n la probabilité p_n pour qu'au moins une des fléchettes atteigne la partie A.

b. Déterminer le plus petit naturel n tel que $p_n \geq 0,99$.

2. 72. Dé, binom. et suites, C. étrangers 2006

5 points

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4. On lit le nombre sur la face cachée.

Pour $k \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$, on note p_i la probabilité d'obtenr le nombre k sur la face cachée. Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres p_1, p_2, p_3 et p_4 dans cet ordre, forment une progression arithmétique.

1. Sachant que $p_4 = 0{,}4$ démontrer que $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}2$ et $p_3 = 0{,}3$.

2. On lance le dé trois fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?

3. On lance 10 fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.

a. Pour à $1 \le i \le 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'événement $(X = i)$.

b. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat obtenu.

c. Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geq 1)$. On donnera une valeur arrondie au millième.

4. Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois le dé, les lancers étant encore supposés indépendants deux à deux. On note U_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au $n^{\text{ième}}$ lancer.

a. Montrer que (U_n) est une suite géométrique et qu'elle est convergente.

b. Calculer $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$ puis étudier la convergence de la suite (S_n).

c. Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n > 0{,}999$.

2. 73. Paquets de gaufrettes

Un supermarché commercialise des gaufrettes vendues en paquets pour lesquels :

Dans 5% des cas l'emballage n'est pas intact.

Dans 70% des emballages non intacts il y au moins une gaufrette cassée.

90% des emballages intacts ne contiennent pas de gaufrette cassée.

1. Un client achète au hasard un paquet de gaufrettes. On note I l'événement « l'emballage est intact » et C l'événement « au moins une gaufrette est cassée ».

a. Calculer la probabilité de I.

b. On considère les événements suivants : E « l'emballage n'est pas intact et aucune gaufrette n'est cassée » et F « l'emballage est intact et aucune gaufrette n'est cassée ».

Exprimer E et F en fonction de I, $\bar{\text{I}}$, et $\bar{\text{C}}$. Calculer les probabilités de E et de F. En déduire la probabilité de $\bar{\text{C}}$, puis celle de C.

c. Le paquet ne contient pas de gaufrette cassée. Calculer la probabilité que l'emballage ait été intact.

2. Lors d'une vente promotionnelle, les paquets sont vendus par lots de 5. Un client achète au hasard un tel lot. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune gaufrette cassée ? Que le lot contienne au moins un emballage détérioré ?

2. 74. Calcul de l'esp. et de la var. de la loi binomiale

On considére une v.a. X suivant une une loi binomiale $B(n, p)$ où $p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On pose $f(x) = (px + 1 - p)^n$.

a. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ puis $f'(1)$ et $f''(1)$.

b. Vérifier que $f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$. Calculer de nouveau $f'(x)$ et $f''(x)$ puis $f'(1)$ et $f''(1)$.

c. Déduire des calculs précédents les valeurs de E(X) et Var(X).

2. 75. Autour du binome

Les trois questions sont indépendantes.

1. Les adhérents du foyer rural de Vaudouhé l'Etang peuvent pratiquer une ou plusieurs des activités suivantes : photographie, mycologie ou pêche. 130 pêchent, et parmi eux 55 font de la mycologie, et 46 de la photo. 155 font de la photo, et parmi eux 60 sont aussi mycologues. Il y a en tout 130 amateurs de champignons, et 24 pratiquent les 3 activités. Combien le foyer rural comporte-t-il d'adhérents ?

2. Résoudre l'équation $\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=3n(n-1)$ dans l'ensemble des entiers supérieurs à 3.

3. On pose $f(x)=(x+1)^n$.

a. Calculer $f'(x)$.

b. En utilisant la formule du binôme de Newton, développer $f(x)$.

c. Déduire du b. une autre expression de $f'(x)$.

d. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$.

2. 76. Examens sanguins

Lors des recrutements massifs de 1940 l'armée américaine mit sur pied une méthode de détection de certaines maladies évitant de procéder par unité (on ne testait pas chaque individu).

Mettons que dans une population N il y ait une proportion p de personnes atteintes d'une maladie donnée, détectable par analyse sanguine. On choisit un échantillon de taille n (certaines recrues de 1940) dont on mélange les prélèvements sanguins.

Si le résultat est négatif aucune de ces n personnes n'est malade, sinon on analyse individuellement chacun des prélèvements. Le problème est évidemment d'optimiser le coût des analyses et donc la taille de l'échantillon n.

1. Soit X_n la v.a. égale au « nombre d'analyses nécessaires pour un groupe de n personnes ».

a. Montrer que $P(X_n=1)=(1-p)^n$. En déduire $P(X_n=n+1)$.

b. Montrer que le nombre moyen d'analyses par personne est $\frac{1}{n}E(X_n)=1+\frac{1}{n}-(1-p)^n$.

2. Si on procède par échantillons de 1, on teste tout le monde ; il faut donc minimiser $\frac{1}{n}E(X_n)$ et pour cela déterminer quand $u_n=\frac{1}{n}-(1-p)^n$ est négatif.

a. On pose $v_n=n(1-p)^n$; montrer qu'il existe une valeur n_0 de n (qui dépend de p) telle que lorsque $n\le n_0$, v_n est croissante et lorsque $n\ge n_0$, v_n est décroissante.

b. En déduire qu'il existe une valeur n_1 de n pour laquelle $v_n>1$ lorsque $n\le n_1$ et $v_n<1$ lorsque $n\ge n_1$.

c. On pose $n=x$ et $f(x)=1-x(1-p)^x$. Retrouver les résultats précédents en étudiant les variations de f.

d. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $u_n>0$.

3. On se demande quelle est la valeur de n pour laquelle l'économie moyenne est la plus forte. Quelle méthode proposeriez-vous pour répondre à cette question ?

2. 77. Evolution d'une population de bactéries

Dans une population de bactéries, à un instant donné, chaque bactérie meurt avec une probabilité p, se divise en deux avec une probabilité q et meurt avec une probabilité $r = 1 - p - q$.

Toutes les bactéries se comportent de la même façon et de manière indépendante. On s'intéresse à la probabilité de disparition des bactéries au cours du temps. On note p_n la probabilité que la génération n ne comporte aucun individu ; dans tous les cas on part d'une seule bactérie initiale.

1. Montrer que $p_1 = p$ et que $p_2 = 2p - pq + p^2(1-q)$.

2. D'une manière générale, montrer que $p_{n+1} = p + rp_n + qp_n^2$.

3. Montrer que la suite p_n est croissante et majorée par 1. Montrer que p_n converge et déterminer les valeurs possibles de sa limite.

4. Etudier les cas $p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{4}, r = \frac{1}{4}$ puis $p = \frac{1}{4}, q = \frac{1}{4}, r = \frac{1}{2}$ et enfin $p = \frac{1}{4}, q = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{4}$.

2. 78. Tirages successifs, Liban 2003

4 points

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.

On note p_n, la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n - 1$ premiers tirages et une boule blanche lors du n-ième tirage.

1. Calculer les probabilités p_2, p_3 et p_4.

2. On considère les évènements suivants :

B_n : «On tire une boule blanche lors du n-ième tirage »,

U_n : «On tire une boule blanche et une seule lors des $n - 1$ premiers tirages ».

a. Calculer la probabilité de l'évènement B_n.

b. Exprimer la probabilité de l'évènement U_n en fonction de n.

c. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et vérifier l'égalité : $p_n = \frac{n-1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

3. On pose : $S_n = p_2 + p_3 + \cdots + p_n$.

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

b. Déterminer la limite de la suite (S_n).

2. 79. Barycentre+urnes+binom., Polynésie 2004

6 points

On donne dans le plan trois points A, B et C distincts non alignés.

Une urne U contient six cartons indiscernables au toucher portant les nombres −2, −1, 0, 1, 2 et 3. Une urne V contient cinq cartons indiscernables au toucher ; quatre cartons portent le nombre 1 et un carton le nombre −1.

On tire au hasard un carton dans chacune des urnes. Les tirages sont équiprobables. On note a le nombre lu sur le carton de U et b celui lu sur le carton de V.

1. Jusitifier que les points pondérés $(A\,;a)$, $(B\,;b)$ et $(C\,;4)$ admettent un barycentre. On note G ce barycentre.

2. a. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : « G appartient à la droite (BC) » ;

E_2 : « G appartient au segment $[BC]$ ».

b. Montrer que la probabilité de l'événement E_3 : « G est situé à l'intérieur du triangle ABC et n'appartient à aucun des côtés » est égale à $\frac{2}{5}$ (on pourra faire appel à des considérations de signe).

3. Soit n un entier naturel non nul. On répète n fois dans les mêmes conditions l'épreuve qui consiste à tirer un carton dans chacune des urnes U et V puis à considérer le barycentre de la question 1. On désigne par X la varaiable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de réalisations de l'événement E_3.

a. Déterminer l'entier n pour que l'espérance de la variable aléatoire X soit égale à 4.

b. Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité d'avoir au moins un des barycentres situé à l'intérieur du triangle ABC soit supérieure ou égale à 0,999.

2. 80. Enquête téléphonique, C. étrangers 2005

3 points

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits.

On admet que lors du premier appel téléphonique, la probabilité que le correspondant ne décroche pas est 0,4 et que s'il décroche, la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire est 0,3.

On pourra construire un arbre pondéré.

1. On note :

- D_1 l'évènement : « la personne décroche au premier appel » ;
- R_1 l'évènement « la personne répond au questionnaire lors du premier appel ».

Calculer la probabilité de l'évènement R_1.

2. Lorsqu'une personne ne décroche pas au premier appel, on la contacte une seconde fois. La probabilité pour que le correspondant ne décroche pas la seconde fois est 0,3 et la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire sachant qu'il décroche est 0,2. Si une personne ne décroche pas lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

On note :

- D_2 l'évènement : « la personne décroche au second appel ».
- R_2 l'évènement : « la personne répond au questionnaire lors du second appel ».
- R l'évènement : « la personne répond au questionnaire ».

Montrer que la probabilité de l'évènement R est 0,236.

3. Sachant qu'une personne a répondu au questionnaire, calculer la probabilité pour que la réponse ait été donnée lors du premier appel (on donnera la réponse arrondie au millième).

4. Un enquêteur a une liste de 25 personnes à contacter. Les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Quelle est la probabilité pour que 20 % des personnes répondent au questionnaire (on donnera la réponse arrondie au millième) ?

2. 81. Enquête téléphonique, France 2000

Les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.

Lors du premier appel téléphonique, la probabilité pour que le correspondant soit absent est 0,4. Sachant que le correspondant est présent, la probabilité pour qu'il accepte de répondre au questionnaire est 0,2.

1. On note :

  – A_1 l'évènement « la personne est absente lors du premier appel » ;

  – R_1 l'évènement « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du premier appel ».

Quelle est la probabilité de R_1 ?

2. Lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois, à une heure différente. La probabilité pour qu'elle soit alors absente est 0,3. Lorsqu'elle est présente au second appel, la probabilité qu'elle accepte de répondre au questionnaire est encore 0,2.

Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

On note :

  A_2 l'évènement « la personne est absente lors du second appel » ;

  R_2 l'évènement « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du second appel » ;

R l'évènement « la personne accepte de répondre au questionnaire ».

Montrer que la probabilité de R est 0,176. (On pourra utiliser un arbre).

3. Sachant qu'une personne a accepté de répondre au questionnaire, quelle est la probabilité pour que la réponse ait eu lieu lors du premier appel ?

4. On suppose que les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Un enquêteur a une liste de 20 personnes à contacter. Quelle est la probabilité pour qu'une au moins des 20 personnes de la liste accepte de répondre au questionnaire ?

2. 82. Dé pipé, Polynésie 2000

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k (k est un entier et $1 \le k \le 6$).

Ce dé a été pipé de telle sorte que :

- les six faces ne sont pas équiprobables,
- les nombres p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r,
- les nombres p_1, p_2, p_4 dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

1. Démontrer que : $p_k = \dfrac{k}{21}$ pour tout entier k tel que $1 \le k \le 6$.

2. On lance ce dé une fois et on considère les évènements suivants :

A : « le nombre obtenu est pair »

B : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3»

C : « le nombre obtenu est 3 ou 4».

a. Calculer la probabilité de chacun de ces évènements.

b. Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3, sachant qu'il est pair.

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Les évènements A et C sont-ils indépendants ?

3. On utilise ce dé pour un jeu. On dispose :

- d'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois boules noires,
- d'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une boule noire.

Le joueur lance le dé :

- s'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1,
- s'il obtient un nombre impair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2.

On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche, on note G cet évènement.

a. Déterminer la probabilité de l'évènement $G \cap A$, puis la probabilité de l'évènement G.

b. Le joueur est gagnant. Déterminer la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer du dé.

2. 83. Pièces truquées, La Réunion 2002

Dans un lot de 100 pièces de monnaie toutes de même apparence, ont été mélangées 60 pièces équilibrées et 40 pièces truquées.

La probabilité d'apparition de « PILE » lors d'un jet d'une pièce truquée est $\dfrac{3}{4}$.

La probabilité d'apparition de « PILE » lors d'un jet d'une pièce équilibrée est $\dfrac{1}{2}$.

On suppose que les différents lancers dont il sera question dans la suite sont indépendants les uns des autres.

La probabilité d'un évènement A est notée $p(A)$. On désigne par $\overline{A}$ l'événement contraire de A.

La probabilité conditionnelle de A sachant que l'évènement B est réalisé est notée $p_B(A)$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On prend une pièce au hasard et on la lance :

soit T l'évènement : « la pièce est truquée »,

soit P l'évènement : « on obtient PILE » .

a. Calculer la probabilité d'obtenir « Pile » (on pourra s'aider d'un arbre).

b. Quelle est la probabilité que la pièce soit truquée sachant que l'on a obtenu « PILE » ?

2. On prend une pièce au hasard et on la lance quatre fois.

Si au cours des quatre lancers on obtient quatre fois « Pile », on décide d'éliminer la pièce, dans le cas contraire, on décide de conserver la pièce.

On note E l'évènement « la pièce est éliminée ».

a. Quelle est la probabilité que la pièce soit éliminée sachant qu'elle est équilibrée ?

b. Quelle est la probabilité que la pièce soit conservée sachant qu'elle est truquée ?

c. Quelle est la probabilité d'avoir pris une pièce équilibrée et de l'avoir éliminée ou d'avoir pris une pièce truquée et de l'avoir conservée ?

2. 84. Clefs et portes, Pondicherry 2000

4 points

Un professeur se trouve en possession de 5 clefs de salles. Il se tient devant une porte et il sait que, parmi ses 5 clefs, 2 n'ouvrent pas la porte parce qu'elles sont défectueuses mais les autres le peuvent. Il veut alors les tester toutes, une à une.

Le choix des clefs est effectué au hasard et sans remise.

On appelle clef numéro x la clef utilisée au x-ième essai.

1. On appelle D_1 l'évènement : « La clef numéro 1 n'ouvre pas la porte ». Calculer sa probabilité.

2. On appelle D_2 l'évènement : « La clef numéro 2 n'ouvre pas la porte ». Calculer la probabilité que l'évènement D_2 se réalise, sachant que l'évènement D_1 est réalisé.

En déduire la probabilité de l'évènement $D_1 \cap D_2$. On pourra, pour la suite de l'exercice, s'aider d'un arbre pondéré.

3. Quelle est la probabilité de l'événement : « Les clefs numéros 1 et 2 ouvrent la porte et la clef numéro 3 ne l'ouvre pas » ?

4. Pour $1 \le i < j \le 5$, on note $(i\,;j)$ l'événement : « Les clefs qui n'ouvrent pas la porte sont les clefs numéros i et j », et $P(i\,;j)$ la probabilité de cet évènement.

a. Calculer $P(2\,;4)$.

b. Calculer $P(4\,;5)$.

2. 85. Hôpital, Liban 2004

4 points

Le personnel d'un très grand hôpital est réparti en trois catégories : les médecins, les soignants (non médecins) et le personnel AT (administratif ou technique).

12% des personnels sont des médecins et 71% sont des soignants.

67% des médecins sont des hommes et 92% des soignants sont des femmes.

On donnera une valeur approchée de tous les résultats à 10^{-4} près.

1. On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital.

a. Quelle est la probabilité d'interroger une femme soignante ?

b. Quelle est la probabilité d'interroger une femme médecin ?

c. On sait que 80% du personnel est féminin. Calculer la probabilité d'interroger une femme AT.

En déduire la probabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel AT.

2. Tout le personnel de cet hôpital a un temps de trajet domicile-hôpital au plus égal à une heure et on suppose que la durée exacte du trajet est une variable aléatoire uniformément répartie sur [0 ; 1].

On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital. Quelle est la probabilité pour que la personne interrogée ait une durée de trajet comprise entre 15 min et 20 min ?

3. Une entreprise souhaite envoyer un courrier publicitaire à 40 personnes qui travaillent dans cet hôpital. Elle a la liste du personnel mais ne connaît pas la fonction de chacun. Elle choisit au hasard 40 noms de la liste (en raison de la taille de la population, on considère qu'il s'agit de 40 tirages successifs indépendants avec remise).

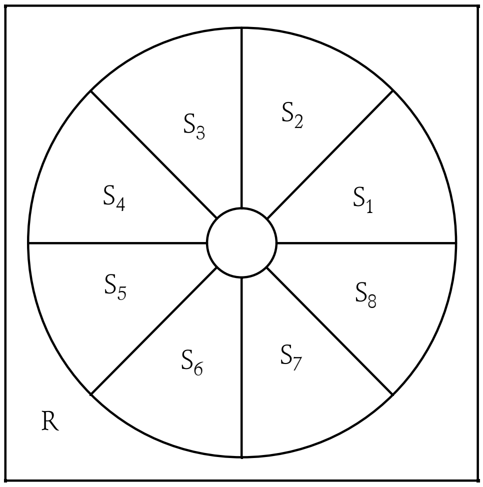
Quelle est la probabilité que, sur les 40 courriers envoyés, 10 exactement soient reçus par des médecins ?

2\. 86. Fléchettes, France 2002

4 points

Un carré de côté 20 cm est partagé selon les 10 zones suivantes :

- un disque D de rayon1 cm,
- 8 secteurs S_1, S_2, . . . , S_8 de même aire délimités par les frontières du disque D et du disque D' de même centre et de rayon 9 cm,
- une zone R entre le disque D' et le bord du carré.



On place un point aléatoirement dans le carré. La probabilité de placer le point dans une zone quelconque du carré est proportionnelle à l'aire de cette zone.

1\. a. Déterminer la probabilité $p(D)$ pour que le point soit placé dans le disque D.

b. Déterminer la probabilité $p(S_1)$ pour que le point soit placé dans le secteur S_1.

2\. Pour cette question, on utilisera les valeurs approchées suivantes : $p(D) = 0,008$ et pour tout k appartenant à $\{1 ; 2; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$, $p(S_k) = 0,0785$.

À cette situation aléatoire est associé le jeu suivant :

- un point placé dans le disque D fait gagner 10 euros ;
- un point placé dans le secteur S_k fait gagner k euros pour tout k appartenant à $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$;
- un point placé dans la zone R fait perdre 4 euros.

On note X la variable alatoire égale au gain algébrique obtenu.

a. Calculer la probabilité $p(R)$ pour que le point soit placé dans la zone R. Calculer l'espérance de X.

b. On joue deux fois de suite. On a donc placé deux points de manière indépendante dans le carré. Calculer la probabilité d'obtenir un gain total positif ou nul.

c. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux. On joue n fois de suite. On a donc placé n points de manière indépendante dans le carré.

Calculer la probabilité p_n d'obtenir aumoins un point placé dans le disque D. Déterminer la plus petite valeur de n tel que $p_n \geq 0,9$.

2\. 87. Fléchettes, Amérique du Nord 2004

4 points

Un jeu de hasard est formé d'un dispositif lançant de façon aléatoire une fléchette dans une cible ayant la forme suivante :

B	B	B	B	B	B	B	B	B	J	J	J	V	V	R
R	V	V	J	J	J	B	B	B	B	B	B	B	B	B

La fléchette atteint toujours une case et une seule.

Les trente cases, blanches (B), jaunes (J), vertes (V) ou rouges (R), ont toutes la même probabilité d'être atteintes.

Si la fléchette atteint une case rouge, le joueur gagne 8 euros.

Si la fléchette atteint une case verte, le joueur gagne 5 euros.

Si la fléchette atteint une case jaune, le joueur ne gagne rien et ne perd rien.

Si la fléchette atteint une case blanche, le joueur perd a euros, la lettre a désigne un nombre réel positif.

1. On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur (compté négativement quand il perd).

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Calculer a pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire pour que l'espérance E(X) soit nulle.

2. Un joueur est considéré comme gagnant s'il a obtenu un gain strictement positif.

a. Quelle est la probabilité p qu'un joueur gagne ?

b. Un joueur joue 5 parties consécutives indépendantes. Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement 2 fois ? exactement 5 fois ?

c. Quel est le nombre moyen de parties gagnantes dans la situation décrite en 2. b. ?

2. 88. Lancer de tétraèdres, Polynésie 2003

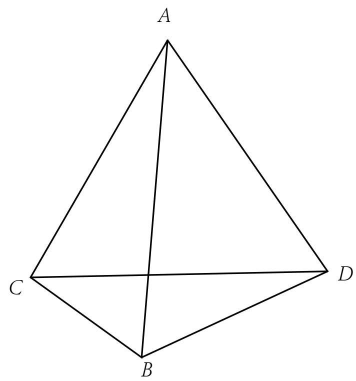
Partie A

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives : A(0 ; 0 ; 3), B($2\sqrt{2}$; 0 ; −1), C($-\sqrt{2}$; $-\sqrt{6}$; −1), D($-\sqrt{2}$; $\sqrt{6}$; −1).

1. Démontrer que ABCD est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les arêtes sont de même longueur.

2. On note R, S, T et U les milieux respectifs des arêtes [AC], [AD], [BD] et [BC] ; démontrer que RSTU est un parallélogramme de centre O.

3. Ce parallélogramme a-t-il des propriétés supplémentaires ? Expliquer.



Partie B

On dispose de trois tétraèdres identiques au précédent, parfaitement équilibrés. Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge.

On lance les trois tétraèdres simultanément (on remarquera que, lorsqu'on lance un tel tétraèdre, une seule face est cachée et trois faces sont visibles).

1. Calculer la probabilité pour qu'au moins trois faces rouges soient visibles sur les trois tétraèdres.

2. Calculer la probabilité pour que la couleur bleue ne soit visible sur aucun tétraèdre.

3. Calculer la probabilité de l'évènement E « les six faces rouges sont visibles ».

4. On répète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres. Calculer la probabilité p_n pour que l'évènement E soit réalisé au moins une fois.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

2. 89. Pièces d'1 euro et loi binom., France 2003

5 points

Un commerce possède un rayon « journaux » et un rayon « souvenirs ». À la fin d'une journée, on trie les pièces de monnaie contenues dans les caisses de chaque rayon. On constate que la caisse du rayon « journaux » contient 3 fois plus de pièces de 1 **€** que celle du rayon « souvenirs ». Les pièces ont toutes le côté pile identique, mais le côté face differe et symbolise un des pays utilisant lamonnaie unique.

Ainsi, 40 % des pièces de 1 **€** dans la caisse du rayon « souvenirs » et 8 % de celles du rayon « journaux » portent une face symbolisant un pays autre que la France (on dira « face étrangère »).

1. Le propriétaire du magasin, collectionneur de monnaies, recherche les pièces portant une face étrangère. Pour cela il prélève au hasard et avec remise 20 pièces issues de la caisse « souvenirs ». On note X la variable aléatoire qui associe à chaque prélèvement le nombre de pièces portant une face « étrangère ».

a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité qu'exactement 5 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.

c. Calculer la probabilité qu'au moins 2 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.

2. Les pièces de 1 € issues des deux caisses sont maintenant rassemblées dans un sac.

On prélève au hasard une pièce du sac.

On note S l'évènement « la pièce provient de la caisse souvenirs » et E l'évènement « la pièce porte une face étrangère ».

a. Déterminer P(S), $P_S(E)$; en déduire $P(S \cap E)$.

b. Démontrer que la probabilité que la pièce porte une face étrangère est égale à 0,16.

c. Sachant que cette pièce porte une face étrangère, déterminer la probabilité qu'elle provienne de la caisse « souvenirs ».

3. Dans la suite, la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans le sac porte une face étrangère est égale à 0,16. Le collectionneur prélève n pièces (n entier supérieur ou égal à 2) du sac au hasard et avec remise.

Calculer n pour que la probabilité qu'il obtienne au moins une pièce portant une face étrangère soit supérieure ou égale à 0,9.

2. 90. Promenades avec un guide, Antilles 2003

5 points

Une association organise des promenades en montagne. Douze guides emmènent chacun, pour la journée, un groupe de personnes dès le lever du Soleil. L'été il y a plus de demandes que de guides et chaque groupe doit s'inscrire la veille de la promenade.

Mais l'expérience des dernières années prouve que la probabilité que chacun des groupes inscrits ne se présente pas au départ de la promenade est égale à $\frac{1}{8}$. On admettra que les groupes inscrits se présentent indépendamment les uns des autres.

Les probabilités demandées seront arrondies au $100^{\text{ème}}$ le plus proche.

1. a. Montrer que la probabilité qu'un jour donné les 12 groupes inscrits soient tous présents est comprise entre 0,20 et 0,21.

b. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où les 12 groupes inscrits se sont tous présentés au départ lors d'unmois de 30 jours. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Donner la signification des évènements $X = 30$ puis $X = 0$ et calculer la probabilité de ces évènements. Préciser l'espérance mathématique $E(X)$. Quelle signification peut-on donner à ce résultat ?

c. Une somme de 1 Crédit (la monnaie locale) est demandée à chaque groupe pour la journée. Cette somme est réglée au départ de la promenade.

Dans le cas où un groupe ne se présente pas au départ, l'association ne gagne évidemment pas le Crédit que ce groupe aurait versé pour la journée.

On nomme S la variable aléatoire égale à la somme, en Crédits, perçue par l'association un jour donné.

Calculer la probabilité de l'évènement $[S = 11]$. Préciser l'espérance mathématique de S.

2. a. Agacé par le nombre de guides inemployés, le dirigeant de l'association décide de prendre chaque jour une réservation supplémentaire. Évidemment si les 13 groupes inscrits se présentent, le $13^{\text{ème}}$ groupe sera dirigé vers une activité de substitution. Toutefois, cette activité de remplacement entraîne une dépense de 2 Crédits à l'association.

Quelle est a probabilité P_{13} qu'un jour donné il n'y ait pas de désistement, c'est-à-dire que les 13 groupes inscrits la veille se présentent au départ de la promenade ?

b. Soit R la variable aléatoire égale au coût de l'activité de substitution.

Préciser la loi de la variable aléatoire R et calculer son espérance mathématique.

c. Montrer que le gain moyen obtenu pour chaque jour est : $\left(\sum_{k=0}^{13} k\binom{k}{13}\left(\frac{7}{8}\right)^k\left(\frac{1}{8}\right)^{13-k}\right)-2P_{13}$.

Calculer ce gain.

d. La décision du dirigeant est-elle rentable pour l'association ?

2. 91. Promenades sans guide, Asie 2001

Pour rejoindre le sommet S d'une montagne des Alpes à partir d'un point de départ D, les randonneurs ont la possibilité d'emprunter plusieurs parcours. La course n'étant pas faisable en une journée, ils doivent passer une nuit dans l'un des deux refuges se trouvant à la même altitude de 1400 mètres sur les parcours existants ; les deux refuges ne sont pas situés au même endroit. On les appelle R_1 et R_2.

Le lendemain matin, pour atteindre le sommet qui se trouve à 2500 mètres d'altitude, ils ont deux possibilités : ils peuvent atteindre le sommet en faisant une halte au refuge R_3, ou atteindre le sommet directement.

La probabilité que les randonneurs choisissent de passer par R_1 est égale à $\frac{1}{3}$.

La probabilité de monter directement au sommet en partant de R_1 est égale à $\frac{3}{4}$.

La probabilité de monter directement au sommet en partant de R_2 est égale à $\frac{2}{3}$.

1. Tracer un arbre pondéré représentant tous les trajets possibles du départ D jusqu'au sommet S.

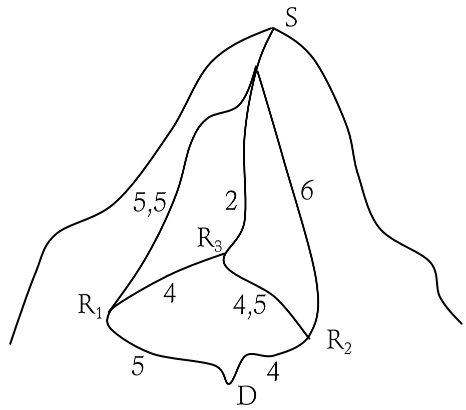
2. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

E1 : « Les randonneurs ont fait une halte au refuge R_3 sachant qu'ils ont passé la nuit au refuge R_1 » ;

E2 : « Les randonneurs ont fait une halte au refuge R_3 » ;

E3 : « Les randonneurs ont passé la nuit au refuge R_1 sachant qu'ils ont fait une halte au refuge R_3 » ;

E4 : « Les randonneurs ont passé la nuit au refuge R_2 sachant que le deuxième jour ils sont montés directement au sommet S ».



3. On note $d(M, N)$ la distance, en km, à parcourir pour se rendre du point M au point N.

On donne

$d(D, R_1) = 5$; $d(D, R_2) = 4$; $d(R_1, R_3) = 4$; $d(R_2, R_3) = 4{,}5$; $d(R_3, S) = 2$; $d(R_1, S) = 5{,}5$; $d(R_2, S) = 6$.

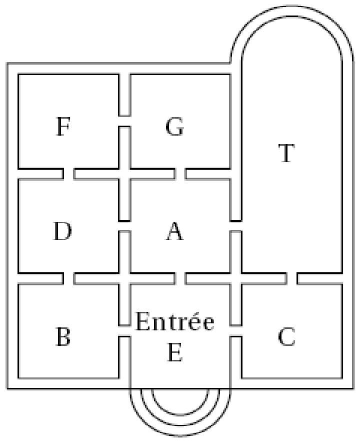
Soit X la variable aléatoire qui représente la distance parcourue par les randonneurs pour aller du départ D au sommet S.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. 92. Visite de musée, Centres étrangers 2001

Le directeur d'unmusée, dont le plan est fourni ci-dessous, organise une exposition.



Afin de prévoir la fréquentation des salles, il décide d'imaginer le parcours d'un visiteur, pris au hasard, en faisant les hypothèses suivantes :

- Le visiteur passe *au hasard* d'une salle à une salle voisine.
- Pour sortir d'une salle, il franchit de manière équiprobable n'importe quelle autre porte que celle qu'il a utilisée pour entrer.

Dans le parcours du visiteur, le directeur ne s'intéresse qu'aux quatre premières salles traversées, l'entrée E étant comprise dans celles-ci. Un trajet par ces quatre premières salles est codé par un mot de quatre lettres, commençant par la lettre E.

Par exemple :

- Si le visiteur passe successivement par les salles E, B, D, F, on codera son trajet par le mot EBDF.
- Le trajet codé EBDB est impossible avec les hypothèses choisies.

1. On considère un visiteur, pris au hasard, devant effectuer un trajet selon les hypothèses précédentes.

a. Construire l'arbre pondéré des différents trajets possibles pour ce visiteur.

b. Montrer que la probabilité du parcours codé EBDF est $\frac{1}{6}$.

c. Déterminer la probabilité p_1 de l'évènement : « La quatrième salle du trajet est F ».

d. Pour des raisons techniques, le directeur installe les oeuvres les plus intéressantes dans la salle T. Déterminer la probabilité p_2 de l'évènement « Le trajet passe par la salle T ».

2. Le directeur imagine dix visiteurs pris au hasard, effectuant chacun un trajet, de manière indépendante et selon les hypothèses précédentes.

On appelle X la variable aléatoire qui, aux dix visiteurs, associe le nombre de leurs trajets passant par la salle T.

a. Calculer la probabilité de l'évènement $(X = 1)$.

b. Calculer la probabilité que deux visiteurs au moins passent par la salle T. (Donner le résultat arrondi au millième.)

c. Le directeur décide d'obliger les visiteurs à se diriger, après l'entrée, vers la salle A, les hypothèses précédentes demeurant pour la suite des trajets. Il pense ainsi augmenter la probabilité que deux visiteurs au moins, sur les dix, passent par la salle T.

Prouver qu'il a tort.

2. 93. Loi de Poisson, Pondichéry 2007

6 points

Pour réaliser une enquête, un employé interroge des personnes prises au hasard dans une galerie commerçante. Il se demande si trois personnes au moins accepteront de répondre.

1. Dans cette question on suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard accepte de répondre est 0,1. L'employé interroge au hasard 50 personnes de manière indépendante. On considère les événements :

A : « au moins une personne accepte de répondre » ;

B : » moins de trois personnes acceptent de répondre » ;

C : « trois personnes ou plus acceptent de répondre ».

Calculer les probabilités des événements A, B et C. On arrondira au millième.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Dans cette question on suppose que la variable aléatoire X qui, à tout groupe de n personnes interrogées indépendamment, associe le nombre de personnes ayant accepté de répondre, suit la loi de probabilité définie par :

$$\text{Pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \le k \le n-1,\ P(X=k)=\frac{e^{-a}a^k}{k!} \text{ et } P(X=n)=1-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{-a}a^k}{k!},$$

formules dans lesquelles $a=\frac{n}{10}$.

a. Montrer que la probabilité qu'au moins trois personnes répondent est donnée par :

$$f(a)=1-e^{-a}\left(1+a+\frac{a^2}{2}\right).$$

b. Calculer $f(5)$. En donner l'arrondi au millième. Cette modélisation donne-t-elle un résultat voisin de celui obtenu à la question 1 ?

3. On conserve le modèle de la question 2. On souhaite déterminer le nombre minimum de personnes à interroger pour que la probabilité que trois d'entre elles au moins répondent soit supérieure ou égale à 0,95.

a. Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=1-e^{-x}\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$ ainsi que sa limite en $+\infty$. Dresser son tableau de variation.

b. Montrer que l'équation $f(x)=0,95$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}^+$ et que cette solution est comprise entre 6,29 et 6,3.

c. En déduire le nombre minimum de personnes à interroger.

2. 94. Accidents (Poisson), N. Calédonie 2003

5 points

On observe sur une longue période le nombre d'accidents de scooters à un carrefour.

Il est alors possible de proposer la modélisation suivante : pour n scooters franchissant le carrefour durant une année (n est un grand nombre inconnu), on admet que la variable aléatoire S_n qui totalise le nombre d'accidents de scooters à ce carrefour durant cette année suit une loi binomiale ; on estime que l'espérance mathématique de S_n notée $E(S_n)$ est égale à 10.

Soit p la probabilité pour un scooter d'être accidenté à ce carrefour pendant l'année considérée.

1. Calculer p, puis justifier l'égalité $P(S_n=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{10}{n}\right)^k\left(1-\frac{10}{n}\right)^{n-k}$ où k est un entier tel que $0 \le k \le n$.

2. a. Établir l'égalité $\ln\left[P(S_n=0)\right]=-10\dfrac{\ln\left(1-\frac{10}{n}\right)}{-\frac{10}{n}}$ où ln désigne la fonction logarithme népérien ; en déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} P(S_n=0)=e^{-10}$.

b. Démontrer que $P(S_n=k+1)=P(S_n=k)\times\frac{n-k}{n-10}\times\frac{10}{k+1}$, où k est un entier naturel tel que $0 \le k \le n-1$.

c. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to\infty} P(S_n=k)=e^{-10}\frac{10^k}{k!}$ pour $0 \le k \le n$, alors on a également $\lim\limits_{n\to\infty} P(S_n=k+1)=e^{-10}\frac{10^{k+1}}{(k+1)!}$ pour $0 \le k+1 \le n$.

d. Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel k que $\lim\limits_{n\to\infty} P(S_n=k)=e^{-10}\frac{10^k}{k!}$ où k est un entier naturel tel que $0 \le k \le n$.

3. On suppose que le nombre n est suffisamment grand pour que l'on puisse admettre que $e^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ est une approximation acceptable de $P(Sn = k)$. Utiliser cette approximation pour calculer à 10^{-4} près la probabilité pour qu'au cours de cette année il y ait au moins trois accidents de scooters à ce carrefour.

2. 95. Loterie

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Un joueur achète 2 € un billet permettant de participer à un jeu constitué d'un grattage suivi d'une loterie.

Il gratte une case sur le billet. Il peut alors gagner 15 € avec une probabilité de $\dfrac{1}{50}$ ou bien ne rien gagner.

G désigne l'événement : « le joueur gagne au grattage ».

Il participe ensuite à une loterie avec le même billet. A cette loterie il peut gagner 15 € ou 30 € ou bien ne rien gagner.

L_1 désigne l'événement : « Le joueur gagne 15 € à la loterie » ;

L_2 désigne l'événement : « Le joueur gagne 30 € à la loterie » ;

P désigne l'événement : « Le joueur ne gagne rien à la loterie ».

Si le joueur n'a rien gagné au grattage, la probabilité qu'il gagne 15 € à la loterie est $\dfrac{1}{70}$ et la probabilité qu'il gagne 30 € à la loterie est $\dfrac{1}{490}$.

1. a. Faire un arbre sur lequel on indiquera les renseignements qui précèdent.

b. Calculer la probabilité pour que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il n'a rien gagné au grattage. Compléter l'arbre obtenu avec cette valeur.

c. Au bout de chaque branche, indiquer le gain algébrique total du joueur, après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.

2. On note X la variable aléatoire qui représente le gain algébrique total du joueur , après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.

La probabilité de l'événement « $X = 13$ » est $\dfrac{2}{125}$.

La probabilité de l'événement « $X = 28$ » est $\dfrac{1}{250}$.

a. Montrer que la probabilité que le joueur gagne 15 € à la loterie, sachant qu'il a gagné 15 € au grattage est égale à $\dfrac{1}{10}$.

b. Calculer la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie , sachant qu'il a gagné 15 € au grattage.

c. Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance de X. Ce jeu est-il équitable ?

3. Chaine de Markov

3. 96. Chaine de Markov, N. Calédonie 2009

5 points

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.

La probabilité que la première cible soit atteinte est $\dfrac{1}{2}$. Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\dfrac{3}{4}$. Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\dfrac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

• A_n l'évènement : « la n-ième cible est atteinte ».

- $\overline{A_n}$ l'évènement : « la n-ième cible n'est pas atteinte.
- a_n la probabilité de l'évènement A_n
- b_n la probabilité de l'évènement $\overline{A_n}$.

1. Donner a_1 et b_1. Calculer a_2 et b_2. On pourra utiliser un arbre pondéré.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$: $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$ puis : $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$.

3. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul, par $U_n = a_n - \frac{2}{3}$.

a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique. On précisera la raison et le premier terme U_1.

b. En déduire l'expression de U_n en fonction de n, puis l'expression de a_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (a_n).

d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $a_n > 0{,}6665$.

3. 97. Tirages successifs, Asie 2008

5 points

On considère plusieurs sacs de billes S_1, S_2, . . . , S_n, . . . tels que :

– le premier, S_1, contient 3 billes jaunes et 2 vertes ;

– chacun des suivants, S_2, S_3, . . . , S_n, . . . contient 2 billes jaunes et 2 vertes.

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution des tirages successifs d'une bille de ces sacs, effectués de la manière suivante :

– on tire au hasard une bille dans S_1 ;

– on place la bille tirée de S_1 dans S_2, puis on tire au hasard une bille dans S_2 ;

– on place la bille tirée de S_2 dans S_3, puis on tire au hasard une bille dans S_3 ;

– etc.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note E_n l'évènement : « la bille tirée dans S_n est verte » et on note $p(E_n)$ sa probabilité.

1. Mise en évidence d'une relation de récurrence

a. D'après l'énoncé, donner les valeurs de $p(E_1)$, $p_{E_1}(E_2)$, $p_{\overline{E_1}}(E_2)$. En déduire la valeur de $p(E_2)$.

b. À l'aide d'un arbre pondéré, exprimer $p(E_{n+1})$ en fonction de $p(E_n)$.

2. Étude d'une suite : on considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = \frac{2}{5} \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} \end{cases}$ pour tout $n \geq 1$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 1.

b. Démontrer que (u_n) est croissante.

c. Justifier que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

3. Évolution des probabilités $p(E_n)$

a. À l'aide des résultats précédents, déterminer l'évolution des probabilités $p(E_n)$.

b. Pour quelles valeurs de l'entier n a-t-on : $0{,}49999 \leq p(E_n) \leq 0{,}5$?

3. 98. Hérédité, Polynésie sept 2007

4 points

La végétation d'un pays imaginaire est composée initialement de trois types de plantes : 40 % de type A, 41 % de type B et 19 % de type C.

On admet qu'au début de chaque année :

- chaque plante de type A disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.

- chaque plante de type B disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.

- chaque plante de type C disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type C.

La probabilité qu'une plante de type A soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type B est 0,3.

La probabilité qu'une plante de type B soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type A est 0,3.

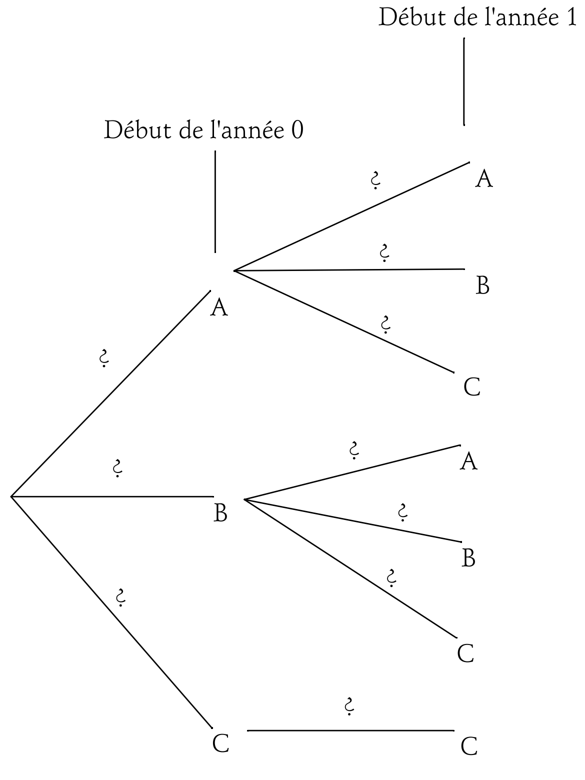
Au début de chaque année, on choisit au hasard une plante dans la végétation et on relève son type.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- A_n l'événement « la plante choisie la n-ième année est de type A »,
- B_n l'événement « la plante choisie la n-ième année est de type B »,
- C_n l'événement « la plante choisie la n-ième année est de type C ».

On désigne par p_n, q_n et r_n les probabilités respectives des vénements A_n, B_n et C_n. Compte tenu de la composition initiale de la végétation (année 0), on pose $p_0 = 0,40$, $q_0 = 0,41$ et $r_0 = 0,19$.

1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-contre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



2. a. Montrer que $p_1 = 0,363$ puis calculer q_1 et r_1.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $\begin{cases} p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3q_n \\ q_{n+1} = 0,3p_n + 0,6q_n \end{cases}$.

3. On définit les suites (S_n) et (D_n) sur $\mathbb{N}$ par :

$$S_n = p_n + q_n \text{ et } D_n = p_n - q_n.$$

a. Montrer que (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. On admet que (D_n) est une suite géométrique de raison 0,3.

b. Déterminer les limites des suites (S_n) et (D_n).

c. En déduire les limites des suites (p_n), (q_n) et (r_n). Interpréter le résultat.

3. 99. Chaîne de Markov, Liban 2007

4 points

On considère deux urnes U_1 et U_2.

L'urne U_1 contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.

L'urne U_2 contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher.

On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :

Étape 1 : On tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.

Étape n ($n > 2$) :

* Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.

* Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans U_2, on note sa couleur et on la remet dans U_2.

On note A_n l'évènement « le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n » et p_n sa probabilité. On a donc $p_1 = 1$.

1. Calculer p_2.

2. Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}05$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

3. Calculer p_3.

4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier n entier naturel non nul, $p_n > 0{,}25$.

b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (p_n) est convergente vers un réel noté l.

d. Justifier que l vérifie l'équation : $l = 0{,}8l + 0{,}05$. En déduire la valeur de l.

3. 100. Chaîne de Markov, Asie 2006

4 points

Pierre et Claude jouent au tennis. Les deux joueurs ont la même chance de gagner la première partie. Par la suite, lorsque Pierre gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7. Et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,8.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul. On considère les évènements :

- G_n : « Pierre gagne la n-ième partie ».
- P_n : « Pierre perd la n-ième partie ».

On pose : $p_n = p(G_n)$ et $q_n = p(P_n)$.

1. Recherche d'une relation de récurrence.

a. Déterminer p_1 puis les probabilités conditionnelles $p_{G_1}(G_2)$ et $p_{P_1}(G_2)$.

b. Justifier l'égalité $p_n + q_n = 1$.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}2$.

2. Étude de la suite (p_n) : on pose, pour tout entier naturel n non nul, $v_n = p_n - \frac{2}{5}$.

a. Prouver que la suite (v_n) est une suite géométrique et exprimer v_n en fonction de n.

b. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

3. 101. Markov, binomiale, N. Calédonie 2003

5 points

Une société de maintenance de photocopieurs désire optimiser ses prestations au niveau des entreprises, afin de proposer un abonnement adapté à ses services.

On note, pour n entier naturel non nul, I_n l'évènement « La société intervient durant le n-ième mois qui suit l'installation d'un photocopieur » et $p_n = p(I_n)$ la probabilité de l'évènement I_n.

Le bureau d'étude a mis en évidence les résultats suivants pour une entreprise déterminée :

- $p(I_1) = p1 = 0{,}75$.
- Sachant qu'il y a eu une intervention durant le n-ième mois qui suit l'installation d'un photocopieur, la probabilité d'intervention le mois suivant est égale à 0,04.
- Sachant qu'il n'y a pas eu d'intervention durant le n-ième mois qui suit l'installation d'un photocopieur, la probabilité d'intervention le mois suivant est égale à 0,64.

On rappelle que $\overline{A}$ est l'évènement contraire de l'évènement A et que $p_B(A)$ est la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé.

PARTIE 1

1. Préciser $p_{I_n}(I_{n+1})$ et $p_{\overline{I_n}}(I_{n+1})$ puis calculer $p(I_{n+1} \cap I_n)$ et $p\left(I_{n+1} \cap \overline{I_n}\right)$ en fonction de p_n ($n \in \mathbb{N}^*$).

2. En déduire $p_{n+1} = -0,6p_n + 0,64$.

3. On considère la suite (q_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $q_n = p_n - 0,4$.

a. Démontrer que (q_n) est une suite géométrique.

b. En déduire q_n puis p_n en fonction de n.

c. Donner une valeur approchée de p_6 à 10^{-3} près par excès.

PARTIE 2

Le même mois, la société de maintenance installe un photocopieur dans 10 entreprises. Six mois plus tard, elle désire libérer une partie de son personnel afin de proposer un stage de mise à niveau.

On estime que la probabilité d'intervention du service de maintenance durant ce mois auprès de chacune de ces entreprises est égale à 0,373.

Donner, à 10^{-3} près par excès, la probabilité qu'il y ait au moins un déplacement du service de maintenance durant ce mois (on supposera que les interventions dans les différentes entreprises sont des évènements indépendants).

3. 102. Ramassage (Markov), C. étrangers 2004

5 points

Un employé se rend à son travail. S'il est à l'heure il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise, s'il est en retard il prend le bus de la ville et il lui en coûte 1,50 **€**.

Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{5}$, s'il est en retard un jour donné la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{20}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on appelle R_n l'évènement : « l'employé est en retard le jour n ». On note p_n la probabilité de R_n et q_n celle de $\overline{R_n}$. On suppose que $p_1 = 0$.

1. Détermination d'une relation de récurrence.

a. Déterminer les probabilités conditionnelles $p_{R_n}(R_{n+1})$ et $p_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.

b. Déterminer $p(R_{n+1} \cap Rn)$ en fonction de p_n et $p(R_{n+1} \cap \overline{R_n})$ en fonction de q_n.

c. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et de q_n.

d. En déduire que $p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20}p_n$.

2. Étude de la suite (p_n). Pour tout entier naturel non nul n, on pose $v_n = p_n - \frac{4}{23}$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{20}$.

b. Exprimer v_n puis p_n en fonction de n.

c. Justifier que la suite (p_n) est convergente et calculer sa limite.

3. 103. Génétique (Markov)

L'objet de l'exercice est une application du calcul des probabilités à la génétique. Une première question est consacrée à une étude de suites qui interviennent dans cette application.

1. Soit α un nombre réel non nul différent de 1. On considère les suites a_n et b_n définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \text{ et } b_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{1-\alpha}{2} b_n \text{ et } b_{n+1} = \alpha b_n \end{cases}$$

a. Exprimer b_n en fonction de n et de α pour tout n.

b. En déduire la valeur de $a_{n+1} - a_n$ et montrer que $a_n = \frac{1}{2}(1-\alpha^n)$ pour tout entier n

2. Etant donné un gène possédant un couple d'allèles A et a, on dit qu'une plante est ***homozygote*** lorsqu'elle contient les deux mêmes allèles sur une paire de chromosomes homologues : elle est alors de génotype AA ou aa. Une plante est ***hétérozygote*** lorsqu'elle est de génotype Aa. Certaines plantes se reproduisent par ***autogamie*** ou ***autofécondation*** : tout se passe pour la descendance comme si on fécondait deux plantes de même génotype, chaque chromosome d'une paire étant sélectionné au hasard.

a. Calculer les probabilités pour qu'une plante de génotype AA, ou Aa, ou aa donne par autogamie une plante de génotype AA, Aa ou aa . On présentera les résultats sous forme de tableau :

Génotype de la plante initiale

Génotype du descendant		AA	Aa	aa
	AA			
	Aa			
	aa			

Ainsi à l'intersection de la colonne Aa et de la ligne aa on fera figurer la probabilité pour qu'une plante de génotype Aa donne par autogamie une plante de génotype aa (le total de chaque colonne est donc forcément 1).

b. Partant d'une plante hétérozygote (Aa) (génération 0) on constitue par autogamie des générations successives. On note

AA_n l'événement « la plante de la n-ième génération est de génotype AA »

Aa_n l'événement « la plante de la n-ième génération est de génotype Aa »

aa_n l'événement « la plante de la n-ième génération est de génotype aa »

on appelle x_n la probabilité de AA_n, y_n la probabilité de Aa_n , z_n la probabilité de aa_n, en particulier $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, et $z_0 = 0$.

Calculer x_1 , y_1 , et z_1.

c. Déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$u_{n+1}=P(AA_{n+1}/AA_n)$,

$v_{n+1}=P(AA_{n+1}/Aa_n)$,

$w_{n+1}=P(Aa_{n+1}/Aa_n)$,

Utiliser ces probabilités conditionnelles pour montrer que $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4} y_n$ et $y_{n+1} = \frac{1}{2} y_n$.

d. Utiliser les résultats du 1° pour donner les valeurs de x_n et y_n. Que vaut $x_n + y_n + z_n$? en déduire z_n.

e. On garde les hypothèses et notations du b. Calculer la probabilité p_n pour qu'une plante de la n-ième génération ne soit pas homozygote. A partir de quelle génération a-t-on $p_n \le 0,01$?

3. 104. Urnes et jetons (Markov)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On imagine n sacs de jetons S_1, S_2, ..., S_n.

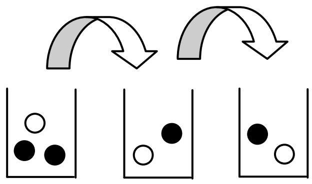
Au départ, le sac S_1 contient 2 jetons noirs et 1 jeton blanc, et chacun des autres sacs contient 1 jeton noir et 1 jeton blanc.

On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton de ces sacs, effectués de la façon suivante :

Première étape : on tire au hasard un jeton de S_1.

Deuxième étape : on place ce jeton dans S_2, et on tire, au hasard, un jeton de S_2.

Troisième étape : après avoir placé dans S_3 le jeton sorti de S_2, on tire, au hasard, un jeton de S_3 ...et ainsi de suite...



Pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$, on note E_k l'événement : « Le jeton sorti de S_k est blanc », et $\overline{E_k}$ l'événement contraire.

1. a. Déterminer la probabilité de E_1, notée $P(E_1)$, et les probabilités conditionnelles : $P_{E_1}(E_2)$ et $P_{\overline{E_1}}(E_2)$. En déduire la probabilité de E_2, notée $P(E_2)$.

b. Pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$, la probabilité de E_k est notée p_k. Justifier la relation de récurrence suivante : $p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$.

2. Étude d'une suite (u_n) : on note (u_k) la suite définie par $u_1 = \frac{1}{3}$ et, pour tout entier naturel k, $u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3}$.

a. On considère la suite (v_k) définie par : pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$, $v_k = u_k - \frac{1}{2}$. Démontrer que (v_k) est une suite géométrique.

b. En déduire l'expression de u_k en fonction de k. Montrer que la suite (u_k) est convergente et préciser sa limite.

3. Dans cette question, on suppose que $n = 10$.

Déterminer pour quelles valeurs de k on a : $0,4999 < p_k < 0,5$.

3. 105. Feux rouges (Markov), Asie 2002

Amélie est en vacances dans une très grande métropole. Elle doit traverser cette ville en suivant l'avenue principale, qui est jalonnée de nombreux feux tricolores.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note E_n l'évènement «Amélie est arrêtée par le n-ième feu rouge ou orange » et $\overline{E_n}$ l'évènement contraire. Le feu orange est considéré comme un feu rouge.

Soit p_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\overline{E_n}$.

La probabilité que le premier feu tricolore soit rouge ou orange vaut $\frac{1}{8}$.

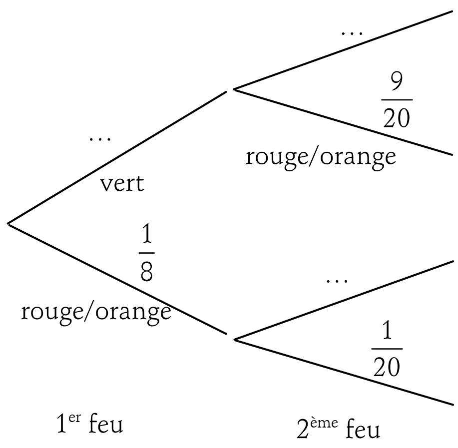
On suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- la probabilité que le $n+1^{\text{ième}}$ feu tricolore soit rouge ou orange, si le $n^{\text{ième}}$ feu est rouge ou orange, vaut $\frac{1}{20}$.

- la probabilité que le $n+1^{\text{ième}}$ feu tricolore soit rouge ou orange, si le $n^{\text{ième}}$ feu est vert, est égale à $\frac{9}{20}$.

1. On s'intéresse, tout d'abord, aux deux premiers feux tricolores.

a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. On note X la variable aléatoire égale au nombre de feux verts parmi ces deux feux tricolores. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. On se place maintenant dans le cas général.

a. Donner les probabilités conditionnelles $p_{E_n}(E_{n+1})$ et $p_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$.

b. En remarquant que $E_{n+1} = (E_{n+1} \cap E_n) \cup (E_{n+1} \cap \overline{E_n})$, montrer, pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = \frac{1}{20}p_n + \frac{9}{20}q_n$.

c. En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.

3. Soit la suite (u_n) de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = 28p_n - 9$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison k.

b. Exprimer u_n, puis p_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite, si elle existe, de p_n, quand n tend vers $+\infty$. Donner une interprétation de ce résultat.

3. 106. Assurance, Polynésie 2002

Une compagnie d'assurance automobile fait un bilan des frais d'intervention, parmi ses dossiers d'accidents de la circulation.

85 % des dossiers entraînent des frais de réparation matérielle.

20 % des dossiers entraînent des frais de dommages corporels.

12 % des dossiers entraînant des frais de réparation matérielle entraînent aussi des frais de dommages corporels.

Soit les évènements suivants :

R : le dossier traité entraîne des frais de réparation matérielle,

D : le dossier traité entraîne des frais de dommages corporels.

1. En utilisant les notations R et D, exprimer les trois pourcentages de l'énoncé en termes de probabilités ; les résultats seront donnés sous forme décimale.

2. Calculer la probabilité pour qu'un dossier :

a. entraîne des frais de réparationmatérielle et des frais de dommages corporels ;

b. entraîne seulement des frais de réparation matérielle ;

c. entraîne seulement des frais de dommages corporels ;

d. n'entraîne ni frais de réparation matérielle ni frais de dommages corporels ;

e. entraîne des frais de réparation matérielle sachant qu'il entraîne des frais de dommages corporels.

3. On constate que 40 % des dossiers traités correspondent à des excès de vitesse et parmi ces derniers 60 % entraînent des frais de dommages corporels.

a. On choisit un dossier ; quelle est la probabilité pour que ce dossier corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels ?

b. On choisit cinq dossiers de façon indépendante. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un dossier corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels.

3. 107. Chaîne de Markov, Antilles 2002

5 points

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}$.

a. Soit la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par $v_n = u_n - \frac{2}{5}$; montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.

2. On considère deux dés, notés A et B. Le dé A comporte trois faces rouges et trois faces blanches. Le dé B comporte quatre faces rouges et deux faces blanches.

On choisit un dé au hasard et on le lance : si on obtient rouge, on garde le même dé, si on obtient blanc, on change de dé. Puis on relance le dé et ainsi de suite.

On désigne par A_n l'évènement « on utilise le dé A au n-ième lancer », par $\overline{A_n}$ l'évènement contraire de A_n, par R_n l'évènement « on obtient rouge au n-ième lancer », par $\overline{R_n}$ l'évènement contraire de Rn, par a_n et r_n les probabilités respectives de A_n et R_n.

a. Déterminer a_1.

b. Déterminer r_1. Pour cela, on pourra s'aider d'un arbre.

c. En remarquant que, pour tout $n \geq 1$, $R_n = (R_n \cap A_n) \cup \left(R_n \cap \overline{A_n}\right)$, montrer que $r_n = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$.

d. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $A_{n+1} = \left(\overline{R_n} \cap \overline{A_n}\right) \cup (R_n \cap A_n)$.

e. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$, puis déterminer l'expression de a_n en fonction de n.

f. En déduire l'expression de r_n en fonction de n puis la limite de r_n quand n tend vers $+\infty$.

3. 108. Fléchettes et chaîne de Markov, Asie 2000

4 points

Alice débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette.

Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$.

Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$.

On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.

Pour tout entier naturel n strictement positif, on considère les évènements suivants :

A_n : « Alice atteint la cible au n-ième coup ».

B_n : « Alice rate la cible au n-ième coup ».

On pose $P_n = p(A_n)$.

Pour les questions 1. et 2. on pourra éventuellement utiliser un arbre pondéré.

1. Déterminer p_1 et montrer que $p_2 = \frac{4}{15}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{15}$.

3. Pour $n \geq 1$ on pose $u_n = p_n - \frac{3}{13}$. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme u_1 et la raison q.

4. Écrire u_n puis p_n en fonction de n.

5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

3. 109. Promenade aléatoire, Polynésie 2005

5 points

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur trois cases notées A, B et C. À l'instant 0, la puce est en A.

Pour tout entier naturel n :

- si à l'instant n la puce est en A, alors à l'instant $(n+1)$, elle est : soit en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$; soit en C avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$;
- si à l'instant n la puce est en B, alors à l'instant $(n+1)$, elle est : soit en C, soit en A de façon équiprobable ;
- si à l'instant n la puce est en C, alors elle y reste.

On note A_n (respectivement B_n, C_n) l'évènement « à l'instant n la puce est en A » (respectivement en B, en C). On note a_n (respectivement b_n, c_n) la probabilité de l'évènement A_n, (respectivement B_n, C_n).

On a donc : $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$.

Pour traiter l'exercice, on pourra s'aider d'arbres pondérés.

1. Calculer a_k, b_k et c_k pour k entier naturel tel que $1 \leq k \leq 3$.

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$ et $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n \end{cases}$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+2} = \frac{1}{6}a_n$.

c. En déduire que, pour tout entier naturel p, $\begin{cases} a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p \text{ et } a_{2p+1} = 0 \\ b_{2p} = 0 \text{ et } b_{2p+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^p \end{cases}$.

3. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. On admet que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Quelle est la limite de c_n lorsque n tend vers $+\infty$?

3. 110. Petit commerce, Antilles 2003

5 points

Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article. Un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure sur 3 % des pièces et un défaut sur un composant électronique sur 2 % des pièces. Les deux défauts étant indépendants l'un de l'autre. Un article sera défectueux s'il présente au moins un des deux défauts.

1. Montrer que la probabilité qu'un article soit défectueux est 0,0494.

2. Une grande surface reçoit 800 de ces articles. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'articles défectueux. Définir la loi de probabilité de X, calculer son espérance mathématique. Interpréter.

3. a. Un petit commerçant commande 25 articles à A. Calculer à 10^{-3} près la probabilité qu'il y ait plus de deux articles défectueux dans la commande.

b. Il veut que sur sa commande la probabilité qu'il y ait au moins un article défectueux soit inférieure à 50 %. Quel est le nombre maximal d'articles qu'il peut commander ?

4. La durée de vie en jours de chaque article est donnée par une loi exponentielle de paramètre 0,0007. Calculer la probabilité, à 10^{-3} près, qu'un article ait une durée de vie comprise entre 700 et 1000 jours.

4. Probabilités continues

4. 111. QCM probas continues, La Réunion 2003

5 points

1. Une urne contient 75 boules blanches et 25 boules noires. On tire une boule ; les boules ont toutes la même probabilité d'être tirées. On effectue n tirages indépendants et avec remise, n supérieur ou égal à 10. Soit X la v.a. égale au nombre de boules blanches tirées.

a. X suit une loi binômiale de paramètres n et 1/4.	c. $\mathrm{P}(\mathrm{X}<5)=1-\mathrm{P}(\mathrm{X}>5)$.
b. $\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)=\dfrac{1}{2^{2n}}$.	d. $\mathrm{E}(\mathrm{X})=0,25n$.

2. Une maladie atteint 1 % d'une population donnée. Un test de dépistage de cette maladie a les caractéristiques suivantes :

* chez des individus malades 99 % des tests sont positifs et 1 % négatifs ;

* chez des individus sains 98 % des tests sont négatifs, 2 % positifs.

Un individu est choisi au hasard et on lui applique le test. Soit M l'événement « l'individu est malade » et T l'événement « le test pratiqué est positif ».

a. $\mathrm{P}_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})+\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{T})=1{,}01$.	c. $\mathrm{P}(\mathrm{T})=2{,}97.10^{-2}$.
b. $\mathrm{P}_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})+\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{T})=\mathrm{P}(\mathrm{T})$.	d. Sachant que le test est positif il y a deux chances sur trois pour que l'individu testé ne soit pas malade.

3. La durée d'attente en secondes à la caisse d'un supermarché est une v.a. Y qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,01.

a. La densité de probabilité de Y est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=e^{-0{,}01t}$.	c. La probabilité d'attendre moins de 3 minutes à cette caisse est 0,16 à 10^{-2} près.
b. Pour tout réel $t\geq 0$, $\mathrm{P}(\mathrm{Y}\leq t)=1-e^{-0{,}01t}$.	d. Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente à cette caisse soit supérieure à une minute.

4. 112. Autocars, Asie 2003

5 points

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des événements extérieurs comme des chutes de pierre, des troupeaux sur la route, etc.

Un autocar part de son dépôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'au premier blocage. On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=\dfrac{1}{82}$. On arrondira les résultats au millième.

1. Calculer la probabilité que la distance parcourue sans blocage soit :

a. comprise entre 50 et 100 km ;

b. supérieure à 300 km.

2. Sachant que l'autocar a parcouru 350 km sans blocage, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres ?

3. a. A l'aide d'une intégration par parties calculer $I(A)=\displaystyle\int_0^A \frac{1}{82}xe^{-\frac{x}{82}}dx$ où A est un nombre positif.

b. Calculer la limite M de $I(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$. On admettra que M est la **distance moyenne** parcourue par un autocar avant le premier blocage.

4. L'entreprise possède N_0 autocars. Les distances parcourues par chacun entre le dépôt et le lieu où survient un blocage sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$. d étant un réel positif, on note X_d la v.a. égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun blocage après avoir parcouru d kilomètres.

a. Montrer que X_d suit une loi binômiale de paramètres N_0 et $e^{-\lambda d}$.

b. Donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun blocage après avoir parcouru d kilomètres.

4. 113. Durée de vie d'une machine

La moyenne de durée de vie d'une machine, telle qu'annoncée par le constructeur, est de 5000 heures.

a. Calculer la probabilité qu'il n'y ait pas de défaillance au cours de 2000 premières heures d'utilisation de la machine.

b. Sachant que la machine n'a pas connu de défaillance au cours des 2000 premières heures d'utilisation, quelle est la probabilité que cette machine ne connaisse aucune défaillance pendant les 6000 premières heures d'utilisation ?

4. 114. Oscilloscopes, Polynésie 2004

4 points

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. Sachant que $p(X > 10) = 0{,}286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est 0,125.

On prendra 0,125 pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.

2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à dix ans ?

4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?

5. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

4. 115. Vie composants, Am. du Sud 2005

4 points

Les parties A et B sont indépendantes

Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut.

On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02.

Partie A

On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle X le nombre de composants défectueux achetés.

Alain achète 50 composants.

1. Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-1} près.

2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

3. Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux ?

Partie B

On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5\times10^{-4}$ et que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$ (on pourra se reporter au formulaire ci-dessous).

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1 000 heures :

a. si ce composant est défectueux ;

b. si ce composant n'est pas défectueux.

Donner une valeur approchée de ces probabilités 10^{-2} près.

2. Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard.

Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est : $P(T\geq t)=0,02e^{-5\times10^{-4}t}+0,98e^{-10^{-4}t}$.

(on rappelle que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02).

3. Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1 000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ?

Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

Formulaire :

Loi exponentielle (ou de durée de vie sans vieillissement) de paramètre λ sur $[0\,;\,+\infty\,[$:

Pour $0\leq a\leq b$, $P([a\,;b])=\int_a^b \lambda e^{-\lambda x}dx$; pour $c\geq 0$, $P\left([c\,;+\infty[\right)=1-\int_0^c \lambda e^{-\lambda x}dx$.

4. 116. Durée de vie, Am. du Nord 2003

5 points

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en années, d'un appareil ménager avant la première panne. On peut modéliser cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur $[0, +\infty[$. Ainsi la probabilité d'un intervalle $[0, t[$, notée $p\left([0,t[\right)$, est la probabilité que l'appareil tombe en panne avant l'instant t.

Cette loi est telle que $p\left([0,t[\right)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx$, où t est un nombre réel positif représentant le nombre d'années. A partir de la question **5.** on prend $\lambda=0,2$.

Questions	Réponses		
	a	*b*	*c*
1. Pour t positif ou nul, la valeur exacte de $p\left([t,+\infty[\right)$ est :	$1-e^{-\lambda t}$	$e^{-\lambda t}$	$1+e^{-\lambda t}$
2. La valeur de t pour laquelle on a $p\left([0,t[\right)=p\left([t,+\infty[\right)$ est :	$\dfrac{\ln 2}{\lambda}$	$\dfrac{\lambda}{\ln 2}$	$\dfrac{\lambda}{2}$
3. D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18. La valeur exacte de λ est alors :	$\ln\left(\dfrac{50}{41}\right)$	$\ln\left(\dfrac{41}{50}\right)$	$\dfrac{\ln 82}{\ln 100}$
4. Sachant que cet appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années, la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est :	$p\left([1,+\infty[\right)$	$p\left([3,+\infty[\right)$	$p\left([2,3[\right)$
5. La probabilité que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années, arrondie à 10^{-4} près, est :	0,5523	0,5488	0,4512

6. Dix appareils neufs de ce type ont été mis en service en même temps. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'appareils qui n'ont pas de panne au cours des trois premières années. La valeur la plus proche de la probabilité de l'événement « X = 4 » est :	0,5555	0,8022	0,1607

4. 117. Loi uniforme, Antilles 2001

Soit m un nombre réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = m\sin x \text{ pour } x \in [0\,;\pi] \\ f(x) = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

1. Déterminer le réel m tel que f soit une densité de probabilité.

2. Représenter f dans un repère orthonormé.

3. Soit X une variable aléatoire dont f est une densité de probabilité.

Définir la fonction de répartition de X puis représenter graphiquement F dans un repère orthonormé.

4. Calculer la probabilité $p\left(\frac{\pi}{4} \le X \le \frac{3\pi}{4}\right)$.

5. Calculer les probabilités $p(X \le 0)$ et $p(X \ge 0)$.

4. 118. Loi continue

1. Soit x un réel positif, calculer $I(x) = \int_0^x t\,e^{-t^2}\,dt$.

2. Soit P une loi de probabilité sur $[0\,;\,+\infty[$ de densité f définie par $f(t) = \lambda t e^{-t^2}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

a. Déterminer λ.

b. Calculer $P([0\,;1])$.

c. On note X la variable aléatoire associée à la probabilité P. Déterminer le réel x_0 tel que $P(X > x_0) = \frac{1}{2}$.

4. 119. Test+binom+adéquation, Antilles 2004

Pour chacune des trois questions, la totalité des points sera donnée si la réponse est correctement justifiée.

Les trois questions sont indépendantes.

1. La probabilité pour un individu d'une population d'être atteint d'une maladie M est égale à 0,003. Un test de dépistage, pour cette maladie, a été réalisé ; avec ce test, on peut dire que

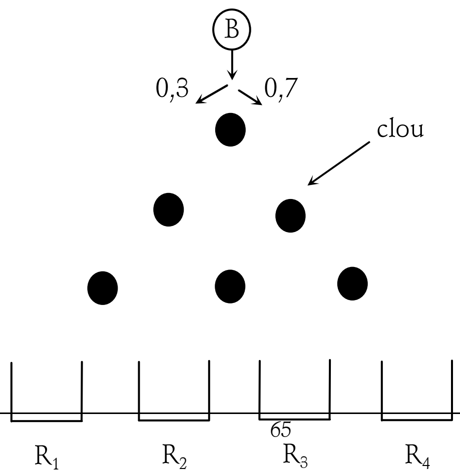
• si une personne est atteinte de la maladie M, le test est positif dans 50 % des cas ;

• le test est positif pour 3% des personnes saines.

Quelle est à 0,01 près la probabilité d'avoir la maladie M lorsque le test est positif ?

a. 0,95 b. 0,9 c. 0,15 d. 0,05

2. On considère une planche à clous de ce type :



On lance une boule B du haut de la planche, elle tombe alors dans l'un des quatre récipients notés R_1, R_2, R_3 et R_4. À chaque étape, la bille a une probabilité de 0,3 d'aller vers la gauche et 0,7 d'aller vers la droite (gauche et droite relatives à l'observateur).

On note p_1 la probabilité que la bille tombe dans le bac R_1 ou dans le bac R_3 et p_2 la probabilité que la bille tombe dans le bac R_2 ou dans le bac R_4.

Que valent p_1 et p_2 ?

a. $p_1 = p_2 = 0{,}5$ b. $p_1 = 0{,}216$ et $p_2 = 0{,}784$

c. $p_1 = 0{,}468$ et $p_2 = 0{,}532$ d. $p_1 = 0{,}468$ et $p_2 = 0{,}432$.

3. Les 1 000 premières décimales de π sont données ici par un ordinateur :

1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510
5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679
8214808651 3233066470 9384460959 0582235725 3594085234
8111745028 4102701930 5211055596 4462294895 4930301964
4288109756 6593344612 8475648233 7867831652 7120190914
5648566923 4603486534 5432664825 3393607260 2491412737
2450700660 6315580574 8815209209 6282925409 1715364367
8925903600 1133053054 8820466525 3841469519 4151160943
3057270365 7595919530 9218611738 1932611793 1051185480
7446297996 2749567355 8857527240 9122793318 3011949129
8336733624 4065664308 6025394946 3952247371 9070217986
0943702770 5392171762 9317675238 4674818467 6691051320
0056812714 5263560827 7857753427 9778900917 3637178721
4684409012 2495343054 6549585371 0507922796 8925892354
2019956112 1290219608 6403441815 9813629774 7713099605
1870721134 9999998372 9780499510 5973173281 6096318599
0244594553 4690830264 2522300253 3446850352 6193110017
1010003137 8387528865 8753320830 1420617177 6691473035
9825349042 8755460731 1595620633 8235378759 3751957781
8577805321 7122600661 3001927876 6111959092 1642019894

En groupant par valeurs entre 0 et 9 ces décimales, on obtient le tableau suivant :

Valeurs	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Occurrences	93	116	102	102	94	97	94	95	101	106

Avec un tableur, on a simulé 1 000 expériences de 1 000 tirages aléatoires d'un chiffre compris entre 0 et 9.

Pour chaque expérience, on a calculé $d^2 = \sum_{k=0}^{9} (f_k - 0{,}1)^2$ où f_k représente, pour l'expérience, la fréquence observée du chiffre k. On a alors obtenu une série statistique pour laquelle on a calculé le premier et neuvième décile (d_1 et d_9), le premier et troisième quartile (Q_1 et Q_3) et la médiane (Me) :

$d_1 = 0{,}000422$; $Q_1 = 0{,}000582$; Me $= 0{,}000822$; $Q_3 = 0{,}001136$; $d_9 = 0{,}00145$.

En effectuant le calcul de d^2 sur la série des 1 000 premières décimales de π, on obtient :

a. 0,000456 b. 0,00456 c. 0,000314

Un statisticien découvrant le tableau et ignorant qu'il s'agit des décimales de π, fait l'hypothèse que la série est issue de tirages aléatoires indépendants suivant une loi équirépartie. Il prend un risque de 10 % de rejeter cette hypothèse quand elle est vraie. Accepte-t-il cette hypothèse ?

a. Oui   b. Non   c. Il ne peut pas conclure.

4. 120. Lancer dé+adéquation, France rempl. 2005

3 points

Partie A

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier, possédant une face bleue, deux faces rouges et une face verte ; on suppose le dé parfaitement équilibré.

Une partie consiste à effectuer deux lancers sucessifs et indépendants de ce dé. À chaque lancer on note la couleur de la face cachée.

On considère les évènements suivants :

E est l'évènement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont vertes »,

F est l'évènement « à l'issue d une partie, les deux faces notées sont de la même couleur ».

1. Calculer les probabilités des évènements E et F ainsi que la probabilité de E sachant F.

2. On effectue dix parties identiques et indépendantes. Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux fois l'évènement F au cours de ces dix parties (on en donnera une valeur approchée décimale à 10^{-3} près).

Partie B

On souhaite savoir si le dé utilisé peut être considéré comme parfaitement équilibré. Pour cela on numérote de 1 à 4 les quatre faces de ce dé, puis on lance ce dé 160 fois en notant le nombre n_i de fois où chaque face est cachée ; on obtient les résultats suivants :

face i	1	2	3	4
effectif n_i	30	48	46	32

On note f_i la fréquence relative à la face n_i et d_{obs}^2 le réel $\sum_{i=1}^{4}\left(f_i-\frac{1}{4}\right)^2$. On simule ensuite 1 000 fois l'expérience consistant à tirer un chiffre au hasard 160 fois parmi l'ensemble (1 ; 2 ; 3 ; 4) puis, pour chaque simulation, on calcule $d^2=\sum_{i=1}^{4}\left(F_i-\frac{1}{4}\right)^2$, où F_i est la fréquence d'apparition du nombre i. Le 9ème décile de la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 est égal à 0,0098. Au vu de l'expérience réalisée et au risque de 10 %, peut-on considérer le dé comme parfaitement équilibré ?

4. 121. Fesic 2003 : Exercice 11

Soit $x\in\mathbb{R}$. On considère la suite géométrique $(u_n(x))$ de premier terme $u_0(x) = 1$ et de raison $q=1-2e^{-x}$.

a. Dans le développement de $u_6(x)=(1-2e^{-x})^6$, le terme correspondant à e^{-4x} est $240e^{-4x}$.

b. Pour x fixé supérieur à 1, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x)=0$.

c. Pour un entier naturel n fixé, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x)=0$.

d. Un lanceur s'exerce à tirer sur une cible située à la distance x (x en mètres, $x\geq 1$). La probabilité qu'il atteigne sa cible est $p=e^{-2x}$. Le lanceur tire n fois vers la cible de façons supposées indépendantes.

La probabilité que ce lanceur atteigne k fois exactement la cible (k étant un entier compris entre 0 et n) est $\binom{n}{k}\times u_1^{n-k}(x)\times\left(1-u_1(x)\right)^k$.

4. 122. Fesic 2003 : Exercice 13

La durée en années du bon fonctionnement d'un composant électronique est modélisée par une variable aléatoire de loi exponentielle. Des tests garantissent une durée moyenne de 10 ans.

a. Le paramètre de la loi exponentielle est 10.

b. La probabilité pour que l'un de ces composants fonctionne correctement moins de 10 ans est $1-\frac{1}{e}$.

c. La probabilité pour que l'un de ces composants fonctionne pendant au moins 10 années est e^{-2}.

d. La probabilité pour que l'un de ces composants fonctionne entre 10 et 15 années est $\frac{e^{-1}-e^{-1,5}}{1-e^{-1}}$.

4. 123. Fesic 2003 : Exercice 14

60 % des candidats au concours de la FESIC sont des filles. Parmi elles, 30 % ont suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale.

Par ailleurs, 20% des candidats sont des garçons qui ont suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale.

a. On interroge un candidat au hasard. La probabilité que ce soit une fille qui ait suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale est de 30 %.

b. On interroge un garçon qui est candidat. La probabilité qu'il ait suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale est de 20 %.

c. 38 % des candidats ont suivi l'enseignement de spécialité demathématiques en terminale.

d. On interroge un candidat qui a suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale. La probabilité qu'il s'agisse d'une fille est $\frac{9}{19}$.